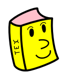
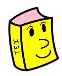
Méthodes 1 : Dimensions et unités

Plan du cours

À savoir	
Définitions du chapitre : grandeur, dimension, équation aux dimensions	I.1,3
Grandeurs de base + leurs unités	I.2
Propriétés de l'analyse dimensionnelle	II
Préfixes et puissances de 10 des multiples/sous-multiples des unités	III

À savoir faire	
Établir l'équation aux dimension d'une grandeur.	I.3
Déterminer l'unité SI d'une grandeur à partir de son équation aux dimensions.	II.1
Vérifier l'homogénéité d'une relation.	II.2
Proposer une loi physique entre différentes grandeurs par analyse dimensionnelle.	II.3
Effectuer des conversions d'unités.	III

I Dimension d'une grandeur physique

I.1 Ne pas confondre une grandeur physique et sa dimension !

♥ Définitions

Grandeur physique : On appelle grandeur physique toute propriété d'un phénomène physique, d'un corps ou d'une substance, qui peut être mesurée et/ou calculée, et dont les valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre et d'une référence (unité de mesure, échelle de valeurs).

Exemple : la masse : nous pouvons mesurer la masse d'un objet à l'aide d'instruments, nous obtenons un nombre associé à une unité, qui caractérise la quantité de particules élémentaires de l'objet (quelle que soit la nature du matériau : plume, plomb, etc). La grandeur physique « masse » a pour fonction d'intervenir dans les expressions des lois, comme celles des lois du mouvement de Newton.

Dimension : La dimension caractérise la nature d'une grandeur physique et définit les unités utilisables. On exprime la dimension d'une grandeur physique par une combinaison de sept grandeurs de base. La dimension d'une grandeur G se note $[G]$.

Exemples : une altitude, notée h, a pour dimension une longueur, on note $[h]$, une durée, notée Δt a la dimension d'un temps, on note $[\Delta t]$.

Remarques

- L'unité est indispensable pour renseigner sur la valeur de la grandeur physique : une valeur sans son unité associée est inutile.
- On ne peut comparer que grandeurs de même dimension, on dit qu'elles sont homogènes.
- La dimension d'une grandeur physique est plus générale que l'unité : la même grandeur peut s'exprimer avec des unités très différentes (par exemple une longueur peut s'exprimer en mètres, en miles, en angströms, etc.)
- Une grandeur purement numérique, comme le rapport de deux longueurs, est dite sans dimension ou adimensionnée.

I.2 7 grandeurs de base pour exprimer les dimensions

♥ Système International

Il y a 7 **grandeurs de base**, et leurs 7 **unités de base** associées, définies par le BIMP (Bureau International des Poids et Mesures, site ici : `https://www.bipm.org/fr/measurement-units/`), à partir desquelles on peut exprimer la dimension de n'importe quelle grandeur physique.

Grandeurs de base	**Symbole**	**Unité SI**
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Intensité du courant	I	ampère (A)
Température	θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

Bureau International des Poids et Mesures

UNITÉS DE BASE

LA SECONDE

La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{Cs}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à s^{-1}.

LE MÈTRE

Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, c, égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en $m\ s^{-1}$, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

LE KILOGRAMME

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h, égale à $6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en J s, unité égale à $kg\ m^2 s^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de c et $\Delta\nu_{Cs}$.

L'AMPÈRE

L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e, égale à $1{,}602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à A s, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

LE KELVIN

Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, k, égale à $1{,}380\ 649 \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $J\ K^{-1}$, unité égale à $kg\ m^2 s^{-2} K^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h, c et $\Delta\nu_{Cs}$.

LA MOLE

La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6{,}022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé « nombre d'Avogadro », correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, N_A, lorsqu'elle est exprimée en mol^{-1}.

La quantité de matière, symbole n, d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Une entité élémentaire peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules.

LA CANDELA

La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse, dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{cd}, égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $lm\ W^{-1}$, unité égale à $cd\ sr\ W^{-1}$, ou $cd\ sr\ kg^{-1} m^{-2} s^3$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h, c et $\Delta\nu_{Cs}$.

⚠ Il ne faut pas confondre les notations des dimensions avec celles des unités (en particulier M, la dimension masse et m l'unité mètre), ni avec celles qui peuvent être attribuées aux différentes grandeurs dans un exercice.

I.3 L'équation aux dimension : l'outil pour exprimer la dimension d'une grandeur

Définition

Équation aux dimensions : Lorsque des grandeurs sont reliées par une loi traduite par une équation, on appelle équation aux dimensions l'équation mathématique considérée dans laquelle les grandeurs ont été substituées par leurs dimensions respectives, exprimées en fonction des sept grandeurs de base.

Exemples :

— la grandeur S et une surface, définie par $S = 4\pi R^2$ pour une sphère, on a $[S] = L^2$

— la grandeur v est une vitesse, définie par $v = \dfrac{D}{\Delta t}$, on a $[v] = \dfrac{L}{T} = LT^{-1}$

Applications

Pour chaque grandeur physique ci-dessous, établir la dimension et donner l'unité (définie en fonction des 7 unités de base du SI, et éventuellement l'unité usuelle) :

a) l'énergie cinétique E_c

b) le poids P

c) le champ de pesanteur terrestre g

d) la puissance P

e) la pression P

f) la constante de Planck h

II L'analyse dimensionnelle : « l'arme secrète du physicien »

L'analyse dimensionnelle est une méthode simple mais extrêmement efficace pour :

— déduire l'unité d'une grandeur physique

— vérifier l'homogénéité d'une équation (permettant ainsi de vérifier qu'une formule n'est pas fausse)

— prédire des relations entre différentes grandeurs physiques (à une constante sans dimension près)

♥ Propriétés très importantes !

Une équation **doit toujours être homogène**. Pour satisfaire cela :

— les deux membres d'une égalité $A = B$ doivent avoir la même dimension, c'est-à-dire $[A] = [B]$

— les termes d'une somme ou d'une différence doivent avoir la même dimension (on n'ajoute pas des distances avec des masses)

— l'argument x des fonctions mathématiques (e^x, $\cos(x)$, $\ln(x)$, etc.) doit toujours être sans dimension, ces fonctions étant elles-mêmes sans dimension

— les deux membres d'une égalité, d'une somme ou d'une différence doivent être de la même nature scalaire/vectorielle : $\overrightarrow{\text{vecteur}} = \overrightarrow{\text{vecteur}}$, scalaire = scalaire

II.1 Déterminer l'unité d'une grandeur par analyse dimensionnelle

☆ Méthode

Pour déterminer l'unité SI d'une grandeur par analyse dimensionnelle :

❶ Écrire une relation dans laquelle la grandeur intervient avec d'autres grandeurs de dimensions connues, puis isoler la grandeur dont on cherche l'unité.
❷ Écrire l'équation aux dimensions correspondante.
❸ Remplacer les dimensions par les unités SI et simplifier si possible.

Applications

a) Déterminer l'équivalent en unité SI des newton.

b) Déterminer l'unité SI de la constante des gaz parfaits R.

II.2 Tester l'homogénéité d'une relation par analyse dimensionnelle

☆ Méthode

Pour vérifier l'homogénéité d'une relation par analyse dimensionnelle :

❶ Étudier séparément la dimension du membre de gauche et celle du membre de droite de l'équation (s'il y a des sommes/différences, étudier la dimension de chaque terme)
❶ Vérifier la cohérence des dimensions de part et d'autre du signe égal, et entre les termes additionnés/soustraits.

Applications

a) L'expression $c = \lambda T$ est-elle homogène ? (avec c la célérité de l'onde, λ la longueur d'onde et T la période)

b) L'expression de la position d'un point au cours d'une chute libre $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$ est-elle homogène ? (avec g le champ de pesanteur, v_0 la vitesse initiale et z_0 l'altitude initiale)

II.3 « Deviner » des lois par analyse dimensionnelle

Contrairement à la méthode scientifique, qui elle a pour objectif de fournir une description formelle de la nature à partir des grands principes de la physique, l'analyse dimensionnelle a pour objectif de de « deviner »des lois à partir d'observations, indépendamment des principes de la physique, et sans en expliquer l'origine.

Méthode

Si une grandeur X est susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs A, B et C caractéristiques du problème et indépendantes, cette grandeur X peut très souvent se mettre sous la forme : $X = kA^\alpha B^\beta C^\gamma$, où k est une constante numérique (sans dimension), et où les exposants α, β et γ peuvent être déterminés par analyse dimensionnelle. **Pour déterminer par analyse dimensionnelle :**

❶ Lister les grandeurs dont peut dépendre la grandeur recherchée.

❷ Exprimer la grandeur recherchée sous la forme $X = kA^\alpha B^\beta C^\gamma$, où k est une constante sans dimension.

❸ Écrire l'équation aux dimensions $[X] = [A]^\alpha [B]^\beta [C]^\gamma$.

❹ Poser le système d'équations vérifié par α, β et γ en égalisant les exposants de chaque dimension et le résoudre.

❺ Conclure sur l'expression de X.

Applications

a) Le satellite Io est en orbite circulaire de rayon R_J autour de Jupiter de masse M_J. Déterminer l'expression, à une constante numérique près, de la période T de Io en fonction de R_J, M_J et de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$.

b) Déterminer, par analyse dimensionnelle, la formule de la poussée d'Archimède Π_A en fonction du volume V du corps immergé, de la masse volumique μ du fluide, de l'accélération de pesanteur g et d'une constante numérique.

III Rappels (utiles !) : conversions d'unités

Préfixes pour les multiples et sous-multiples

10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
atto	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci		déca	hecto	kilo	méga	giga	téra
a	f	p	n	μ	m	c	d		da	h	k	M	G	T

Application

Les résultats devront être donnés en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$ avec $a \in [1; 10[$ et n un entier relatif.

Q1. Effectuer les conversions d'unités suivantes :

$3\,\text{nm} =$ ____________ m	$0{,}015\,\mu\text{m} =$ ____________ nm	$0{,}45\,\text{mm} =$ ____________ µm
$5\,\text{m} =$ ____________ nm	$3\,\text{m} =$ ____________ km	$400\,000\,\text{J} =$ ____________ MJ
$0{,}3\,\mu\text{m} =$ ____________ m	$34\,\text{cm} =$ ____________ m	$50\,\text{GJ} =$ ____________ J
$0{,}06\,\text{m} =$ ____________ µm	$41\,\text{km} =$ ____________ m	$150\,\text{fm} =$ ____________ m
$120\,\text{pm} =$ ____________ nm	$320\,\text{mm} =$ ____________ m	$3\,\text{h} =$ ____________ s

Q2. Effectuer les conversions d'unités de surfaces suivantes :
Rappel : $3\,\text{cm}^2 = 3\,\text{cm} \times \text{cm} = 3 \times 10^{-2}\,\text{m} \times 10^{-2}\ \text{m} = 3 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$

$50\,\text{mm}^2 =$ ____________ m^2	$50\,\text{cm}^2 =$ ____________ m^2	$45\,\text{nm}^2 =$ ____________ m^2
$0{,}0056\,\text{m}^2 =$ ____________ mm^2	$50\,\text{mm}^2 =$ ____________ cm^2	$5 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 =$ ____________ μm^2

Q3. Effectuer les conversions d'unités de volumes suivantes :
Rappels : $3\,\text{cm}^3 = 3\,\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = 3 \times 10^{-2}\,\text{m} \times 10^{-2}\text{m} \times 10^{-2}\text{m} = 3 \times 10^{-6}\,\text{m}^3$
Conversion du Litre en mètre cube : $1000\ \text{L} = 1\,\text{m}^3$ ou $1\ \text{L} = 1 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 = 1\,\text{dm}^3$

$500\,\text{mm}^3 =$ ____________ m^3	$50\,\text{dm}^3 =$ ____________ L	$45\,\text{m}^3 =$ ____________ L
$0{,}0056\,\text{m}^3 =$ ____________ cm^3	$50\,\text{L} =$ ____________ m^3	$5 \times 10^{-6}\,\text{m}^3 =$ ____________ μm^3