

# Problème d'entraînement OSC

## Récupération d'énergie en discothèque

Problème adapté de e3a-Polytech.

De nombreux systèmes de récupération d'énergie sont aujourd'hui utilisés pour alimenter des capteurs ou des petits dispositifs électroniques. Ces systèmes récupèrent de l'énergie de l'activité humaine, de la chaleur ambiante, de la lumière ou des vibrations. On étudie dans cette partie un système conçu et mis en œuvre par des ingénieurs néerlandais afin de récupérer de l'énergie issue de la danse, dans le contexte d'une discothèque (voir figure 1). Ce système a fait l'objet d'un brevet, publié en 2010 par l'entreprise Energy Floors ®.



Club Watt, Rotterdam (Sustainable Dance Club BV ®)

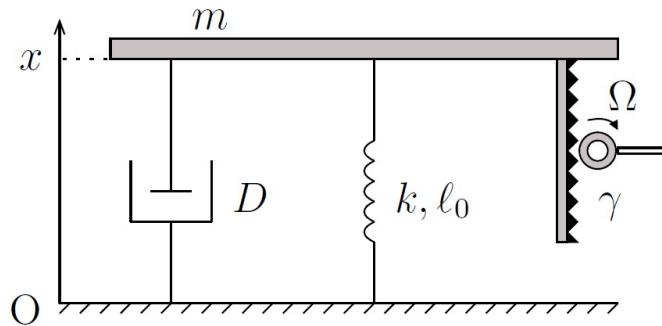
La piste de danse est composée d'un réseau de modules surmontés de dalles mobiles, convertissant une partie de l'énergie cinétique des danseurs en énergie électrique. Cette énergie est ensuite utilisée pour éclairer, entre autres, une assemblée de diodes électroluminescentes (LED) multicolores situées sur les dalles et autour de la piste de danse. Chaque module comprend également un système optique de miroirs permettant d'observer une multitude d'images de chaque LED, simulant un effet de « miroir infini ».

### Partie I. Mouvement de la dalle : mise en équation

Pour étudier le comportement mécanique du système récupérateur d'énergie, on se place à l'échelle d'un module unique, constitué d'une dalle de dimensions  $65 \text{ cm} \times 65 \text{ cm} \times 14,5 \text{ cm}$  suspendue par des ressorts mécaniques. Pour simplifier, on la modélise par une masse  $m$  reliée à un ressort équivalent de longueur à vide  $\ell_0$  et de constante de raideur  $k$ , ainsi qu'à un amortisseur mécanique (frottement fluide) de coefficient  $D > 0$  (voir figure 2), exerçant une force  $\vec{f} = -Dx\vec{e}_x$ . On note  $\vec{g} = -g\vec{e}_x$  le champ de pesanteur supposé uniforme.

La dalle est repérée par sa position  $x$  sur un axe vertical ascendant de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ , l'origine  $O$  étant liée au bâti. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen ; on note

$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$  son vecteur vitesse dans ce référentiel. Le déplacement linéaire vertical de la dalle est ensuite converti en mouvement de rotation par un engrenage de type pignon-crémaillère.



Modèle mécanique de la dalle mobile : schéma et notations.

- Q1. Exprimer la force de rappel  $\vec{F}_r$  exercée par le ressort sur la dalle en fonction des données du problème.
- Q2. La dalle étant supposée au repos dans un premier temps, déterminer sa position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$  en fonction de  $\ell_0$ ,  $k$ ,  $m$  et  $g$ . Vérifier l'homogénéité dimensionnelle et la pertinence physique de l'expression obtenue.

Un danseur de masse  $M$  monte sur la dalle : cette dernière se met alors en mouvement, avant de se stabiliser à une nouvelle position d'équilibre  $x'_{\text{eq}}$ .

- Q3. Donner l'expression littérale de  $x'_{\text{eq}}$ , puis l'affaissement de la dalle  $\delta = x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}}$ .

Le constructeur précise ci-dessous un critère de dimensionnement du ressort équivalent :

#### Document 1: Extrait du projet

Although the dancer is aware that energy is generated from the dance floor, the dancing experience should only be disturbed a little. Therefore, only little movement (several millimeters) of the suspended floor is allowed, and a high spring <sup>a</sup> stiffness <sup>b</sup> has been selected to achieve this.

*Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011

- 
- a. ressort
  - b. raideur

- Q4. En choisissant une valeur raisonnable pour  $M$  (adulte de corpulence moyenne), proposer une valeur de constante de raideur permettant de répondre en régime quasi-statique à la contrainte imposée.

On cherche à présent à décrire la dynamique du mouvement de la dalle. Outre son poids, la force de rappel du ressort et la force  $f$  exercée par l'amortisseur mécanique (donnée par  $f = -D\dot{x}\vec{e}_x$ ) , la dalle subit également :

- une force exercée par le danseur en mouvement, notée  $\vec{F}$  ;
  - une force d'amortissement électromagnétique  $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$  , avec  $\alpha > 0$  ; on justifiera son expression dans la partie suivante.
- Q5. Après avoir posé  $X = x - x_{\text{eq}}$ , montrer que le mouvement de la dalle est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{X} + \frac{D + \alpha}{m}\dot{X} + a_0X = b_0$$

où on donnera les expressions de  $a_0$  et  $b_0$  en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $F$ .

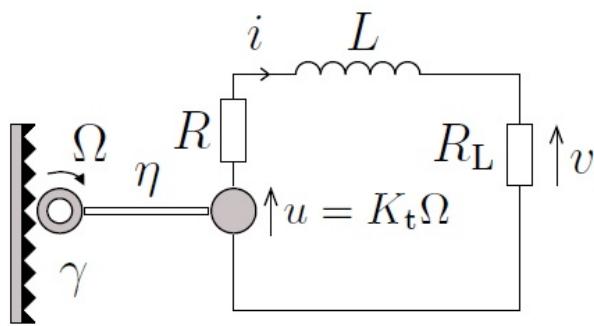
Q6. Le système ainsi modélisé est-il linéaire ? Justifier la réponse.

## Partie II. Puissance électrique reçue par les LED

Le mouvement de translation de la dalle, de vitesse  $\dot{x}(t)$ , entraîne la rotation de la roue dentée schématisée sur la figure 3. On admet que sa vitesse angulaire de rotation s'exprime  $\Omega = \gamma\dot{x}(t)$ , avec  $\gamma$  le rapport de transmission.

L'énergie cinétique de la roue dentée est par la suite convertie en énergie électrique au moyen d'une génératrice, servant alors à éclairer un réseau de LED disposées sur la partie supérieure des dalles.

On modélise dans un premier temps la génératrice par l'association série d'une force électromotrice (f.e.m.)  $u = K_t\Omega$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 19,2\Omega$ , et d'une bobine d'inductance propre  $L = 1,67\text{ mH}$ . On s'intéresse à la puissance débitée par ce dipôle dans le réseau de LED, assimilé à une résistance de charge  $R_L$  (voir figure 3).



Circuit électrique équivalent : schéma et notations.

Q7. La pulsation  $\omega$  étant celle imposée par les pas du danseur, estimer son ordre de grandeur puis montrer que  $L\omega \ll R$ . Cette condition permettra d'utiliser pour la suite du problème l'approximation proposée ci-dessous (document 2) par le constructeur.

### Document 2: Extrait du projet

As such, the armature winding inductance has been neglected because of the low excitation frequency of the system.

*Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011

Q8. Dans le cadre de l'approximation précédente, exprimer la tension  $v$  aux bornes de la résistance  $R_L$  en fonction de  $u$ ,  $R$  et  $R_L$ .

Q9. Déduire de la question précédente que la puissance électrique instantanée  $P_L(t)$  reçue par le réseau de LED peut s'écrire :

$$P_L(t) = A[K_t\gamma\dot{x}(t)]^2$$

avec  $A$  un facteur à exprimer en fonction de  $R$  et  $R_L$  uniquement.

La génératrice concède des pertes au cours de son fonctionnement. Son rendement est défini par :

$$\eta = \frac{P_u(t)}{P_p(t)} \quad (0 < \eta < 1)$$

où  $P_u(t)$  et  $P_p(t)$  désignent respectivement la puissance instantanée fournie par la f.e.m. et la puissance instantanée prélevée par la génératrice à la dalle mobile.

**Q10.** Exprimer  $P_u(t)$  en fonction de  $K_t$ ,  $\dot{x}$ ,  $R$  et  $R_L$ . En déduire l'expression de  $P_p(t)$  en fonction de ces paramètres et de  $\eta$ .

On peut en déduire que cette puissance prélevée se traduit, d'un point de vue de la dalle, par une force de frottement de la forme  $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$  (comme en début de problème), avec :

$$\alpha = \frac{(K_t \gamma)^2}{\eta(R + R_L)}$$

**Q11.** On donne  $\eta = 50\%$ ,  $K_t = 7,28 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$ . En prenant  $R_L = 150 \Omega$  et  $\gamma = 2,2 \times 10^4 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}$ , calculer la valeur de  $\alpha$ . Sachant que  $D = 10 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ , justifier le commentaire du constructeur reporté ci-dessous :

#### Document 3: Extrait du projet

When energy is generated for lighting, the damping<sup>a</sup> of the system is determined by the dc generator and its electrical load. In that case, the mechanical damping may be neglected.

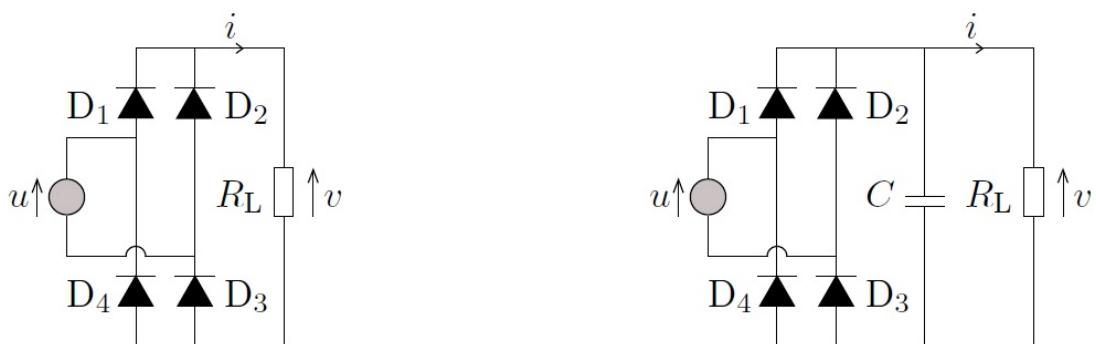
*Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011

---

a. amortissement

### Partie III. Alimentation électrique des LED

On cherche ici à modéliser plus finement le circuit réel d'alimentation des LED. Dans le but d'obtenir une régulation linéaire de l'intensité lumineuse, on insère les LED, assimilées à une résistance de charge  $R_L$ , dans le montage représenté sur la figure 4 (à gauche), commandé par la tension  $u$  aux bornes de la génératrice. Les quatre diodes  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  sont supposées idéales (sans seuil). On cherche à déterminer la tension  $v$  aux bornes de la résistance  $R_L$ .



Circuits électriques d'alimentation des LED : schémas et notations.

**Q12.** Rappeler la caractéristique courant-tension d'une diode idéale.

**Q13.** Si la tension  $u$  est positive, décrire l'état des différentes diodes, puis en déduire la relation entre  $v$  et  $u$ . Traiter de même le cas d'une tension  $u$  négative.

On considère une tension d'entrée du type  $u(t) = a \cos(\omega t)$ .

**Q14.** Représenter sur un même graphe l'évolution temporelle des tensions  $u$  et  $v$ . Quel est le rôle du pont de diodes ?

Afin de corriger un problème de clignotement qui pourrait résulter de l'utilisation de ce montage, on rajoute dans le circuit un convertisseur, assimilé à un condensateur de capacité  $C$  connecté en parallèle avec la résistance  $R_L$  (voir figure 4, à droite). Ce condensateur de « découplage » permet de lisser la tension de sortie  $v$ , à condition que son temps caractéristique  $\tau$  de décharge dans la résistance  $R_L$  soit grand devant la période du signal d'entrée.

**Q15.** En notant  $\tau = R_L^\alpha C^\beta$ , déterminer soigneusement les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

**Q16.** On donne  $R_L = 150 \Omega$ . En considérant une pulsation d'excitation  $\omega$  de l'ordre de  $10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , en déduire une condition numérique sur  $C$  permettant d'assurer un lissage satisfaisant de la tension  $v$ , et donc du courant  $i$  circulant dans le réseau de LED. Cette condition est-elle réalisable avec une boîte à décades de capacité habituellement utilisée en TP ?

## Partie IV. Réponse indicielle

Durant les phases de conception du dispositif, des simulations numériques ont été réalisées dans le but d'optimiser la conversion d'énergie cinétique en énergie électrique, tout en respectant les exigences de puissance et de sécurité. Dans cette partie, on impose à la dalle, initialement à sa position d'équilibre et immobile, un échelon de force  $F = F_0$  à partir de l'instant  $t = 0$ , et on cherche à quantifier la puissance fournie au réseau de LED. En utilisant les parties précédentes, l'équation du mouvement de la dalle peut être approchée par :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{F_0}{m}$$

où  $X = x - x_{\text{eq}}$  (voir première partie). Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \frac{F_0}{k}$$

On donne la valeur des paramètres mécaniques :  $m = 35 \text{ kg}$ ,  $k = 1,5 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . On prendra numériquement  $\alpha = 3,0 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**Q17.** Donner les expressions des quantités  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $\alpha$ , puis préciser leurs dimensions et leurs noms habituels respectifs.

**Q18.** Déterminer, en le justifiant, le type de régime transitoire d'évolution de  $X(t)$  parmi les adjectifs suivants : pseudo-périodique, critique, apériodique.

**Q19.** Exprimer la solution particulière de l'équation différentielle régissant l'évolution de  $X(t)$ .

Pour  $x \ll 1$ , on peut faire l'approximation suivante :  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , avec  $n$  réel.

**Q20.** Compte-tenu des ordres de grandeur, montrer que la solution de l'équation différentielle régissant l'évolution de  $X(t)$  peut s'écrire de façon approchée :

$$X(t) \approx \frac{F_0}{k} \left[ 1 - \frac{1}{1 - Q^2} \left( e^{-\omega_0 Qt} - Q^2 e^{-\omega_0 t/Q} \right) \right]$$

**Q21.** Déterminer la loi d'évolution de la vitesse  $\dot{x}(t)$  de la dalle.

- Q22. Montrer finalement que dans le cadre du modèle développé à la question Q9., la puissance électrique instantanée reçue par les LED s'écrit sous la forme :

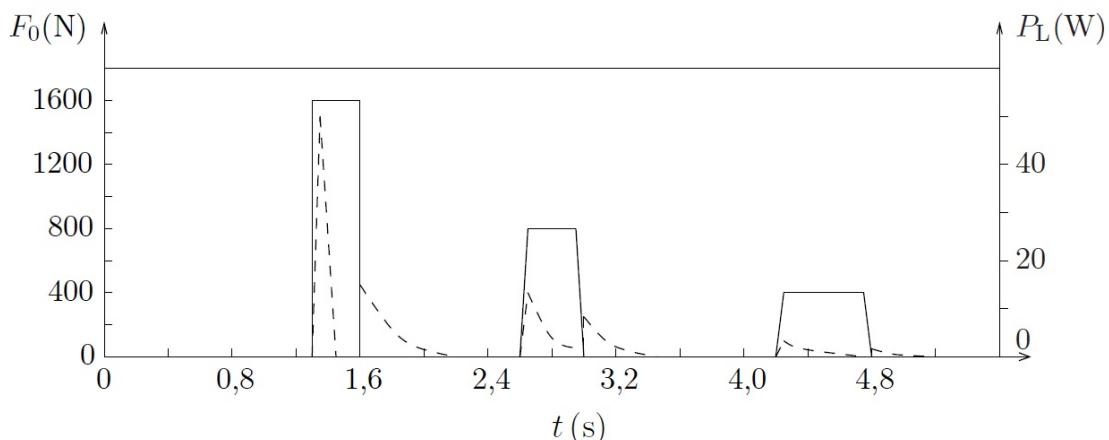
$$P_L(t) = K' F_0^2 \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t/Q} \right)^2$$

avec  $K'$  un facteur constant qu'on ne cherchera pas à déterminer.

- Q23. Dans l'expression de  $P_L(t)$ , une exponentielle converge beaucoup plus vite que l'autre : déterminer laquelle.

Montrer alors qu'aux « temps longs »,  $P_L(t)$  décroît exponentiellement, selon un temps caractéristique  $\tau$  à exprimer en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ . Faire l'application numérique pour déterminer la valeur de  $\tau$ .

La figure 5, adaptée de la notice constructeur, représente l'évolution de la puissance électrique prédictive (signal de sortie) sous l'effet de plusieurs échelons de force successifs d'intensité différente (signal d'entrée).



Évolutions temporelles de la force et de la puissance électrique : simulations numériques (adapté de *Energy Floors®*).

- Q24. Associer chaque courbe (en traits pleins, en pointillés) à la grandeur correspondante :  $F_0$ ,  $P_L$ . Indiquer les intervalles temporels pendant lesquels sont appliqués des échelons de force, ainsi que les valeurs de  $F_0$  associées.

Le constructeur précise :

#### Document 4: Extrait du projet

Energy is both generated when the tile <sup>a</sup> a moves downward due to the force applied by the dancer and when the tile moves upward due to the spring even when there is no contact with the dancer.

*Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011

<sup>a.</sup> dalle

- Q25. Ce commentaire est-il en cohérence avec la figure 5 ? Comment justifier que la puissance électrique tende vers zéro au bout d'un temps suffisamment long, même en présence d'une force appliquée non nulle ?

- Q26. Analyser l'influence de l'échelon de force  $F_0$  sur l'allure de  $P_L(t)$ , en lien avec la question Q22.

- Q27. Le temps typique de décroissance  $\tau$  de la puissance électrique lors de l'application d'un échelon de force semble-t-il dépendre de  $F_0$  ? Estimer son ordre de grandeur, puis le comparer à la prédiction obtenue à la question Q23.