Problème d'entraînement OSC2

Exercice 1 : Principe d'un accéléromètre

Adapté du concours Centrale Supélec TSI 2020

On considère une voiture en mouvement selon l'axe horizontal Ox, de vecteur directeur $\overrightarrow{u_x}$.

Avant de commencer à freiner, la voiture est animée d'un mouvement rectiligne uniforme. Lors d'une phase de freinage, le référentiel lié à la voiture (noté $\mathcal{R}_V$ est animé de l'accélération $\overrightarrow{a}(\mathcal{R}_V/\mathcal{R}_T) = -a\,\overrightarrow{u_x}$ (avec $a > 0$) par rapport au référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Selon le schéma ci-dessous, m est susceptible de se déplacer par rapport à la voiture, horizontalement, sans frottement solide avec son support (support lié à la voiture). Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide L_0.

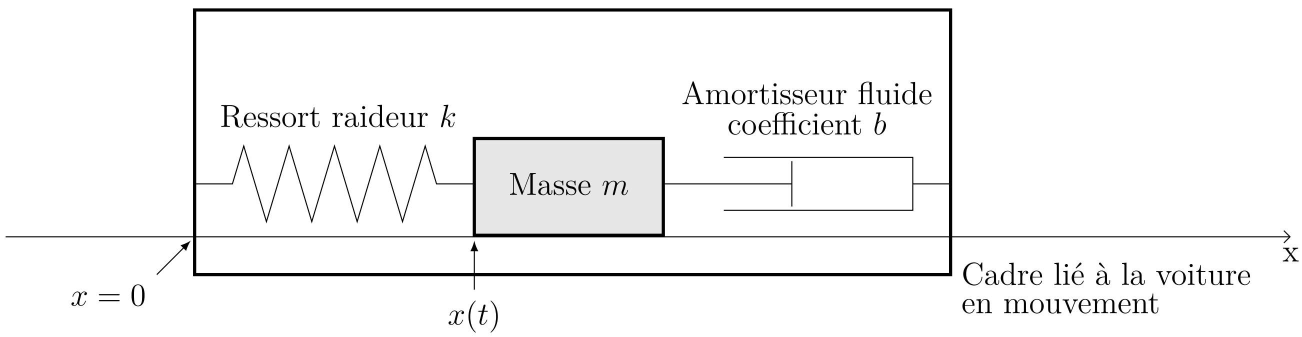

Figure 1

L'amortisseur exerce sur m une force de frottement fluide, d'expression : $\overrightarrow{f} = -b\,\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture, et b est une constante ($b > 0$).

Q1. Le référentiel $\mathcal{R}_V$ lié à la voiture est-il galiléen ? Justifier.

Pour tenir compte de ce fait, on admet que, dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}_V$, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire, nommée force d'inertie d'entraînement, d'expression :

$$\overrightarrow{f}_{\text{ie}} = -\,m\,\overrightarrow{a}(\mathcal{R}_V/\mathcal{R}_T) = +\,m\,a\,\overrightarrow{u_x}$$

Q2. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la masse m, dans le référentiel $\mathcal{R}_V$ lié à la voiture.

Q3. Montrer que dans ce référentiel $\mathcal{R}_V$, l'équation différentielle du mouvement peut être mise sous la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = a$$

où on donnera l'expression de $X(t)$ en fonction de $x(t)$ et L_0, ainsi que les noms des paramètres ω_0 et Q et leurs expressions en fonction de m, k et b.

On suppose que la phase de freinage commence à $t = 0$. On note t_0 l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage, le ressort a une longueur égale à L_0.

Q4. Quelle est l'expression de $X(t)$ pour $t \leq 0$?

Q5. Que peut-on dire de la réponse du système en au bout d'un temps suffisamment long ? Donner l'expression correspondante de $X(t)$, en fonction de a et ω_0.

On fait l'hypothèse simplificatrice que lors d'un freinage, l'accélération de la voiture reste constante jusqu'à son arrêt complet, qui survient en $t = t_0$.

Q6. La voiture roule à vitesse constante $V = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. On suppose que la voiture s'arrête totalement après 2,5 s. Donner l'expression littérale de la norme de l'accélération moyenne durant la phase d'arrêt de la voiture, puis calculer sa valeur numérique en unité SI.

Pour les questions Q7 à Q11, on se place dans le cas où le facteur de qualité est égal à $\frac{1}{2}$.

Q7. Quel est le nom du régime de variation de $X(t)$ pour $Q = \frac{1}{2}$? Quelle est l'expression générale de la solution ? (on la fournira sans aucune démonstration)

Q8. Déterminer l'expression littérale complète de la solution $X(t)$ pour $t < t_0$. On prendra comme condition initiale sur la vitesse $\frac{dX}{dt}(t = 0) = 0$ (vitesse initiale nulle dans $\mathcal{R}_V$).

Q9. Quel est l'ordre de grandeur du temps que met le système à parvenir à l'équilibre ?

Q10. Dès que la voiture est arrêtée ($t > t_0$), la force d'inertie d'entraînement n'est plus présente. En déduire l'expression de $X(t)$ pour $t > t_0$.

Q11. Tracer l'allure de $X(t)$ sur un graphe pour $0 < t < 2t_0$, en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir entre $t = 0$ et t_0.

Pour les questions Q12 et Q13, on suppose que le système oscillant répond en régime pseudo-périodique.

Q12. **Démontrer** la condition sur Q pour obtenir une solution de type sinusoïdales amorties pour $X(t)$. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle homogène dans ce cas, en faisant apparaître le paramètre Ω, appelée pseudo-pulsation, dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 et Q.

Q13. Quelle sera l'expression du temps caractéristique d'amortissement des oscillations ?
On suppose que $\omega_0 = 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Si le facteur de qualité vaut 10, que vaudra alors ce temps d'amortissement ? Cette configuration semble-t-elle pertinente pour la détection d'un choc brutal ?