Problème d'entraînement MECA

Physique au parc d'attraction : toboggan aquatique

Adapté du concours Epita MPI 2023

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, cet exercice propose d'en étudier deux : le toboggan rectiligne, et celui avec un petit « tremplin » à la fin de la descente.

Partie I. Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h, et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

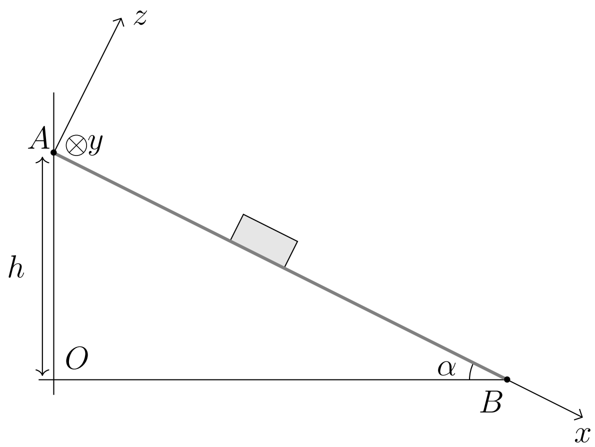

FIGURE 1 : À gauche : photographie du toboggan « le géant » du parc WaveIsland . Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33\,\text{m}$ et $\alpha \approx 45\ ^\circ$. À droite : modélisation retenue pour l'étude.

Dans un premier temps on néglige tout frottement.

Q1. Établir l'expression de la vitesse atteinte v_B atteinte par le passager au point B, en fonction de h, g, puis sa valeur numérique en km·h^{-1}. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (à droite), avec $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\overrightarrow{e_x}$ uniquement.

On prend maintenant en compte les frottements. La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{e_z} - T\overrightarrow{e_x}$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb du frottement solide : tout au long du mouvement, on a la relation : $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

Q2. Déterminer l'expression de N en fonction de m, g et α.

Q3. La direction du parc indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Déterminer la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan pour « le géant » de WaveIsland.

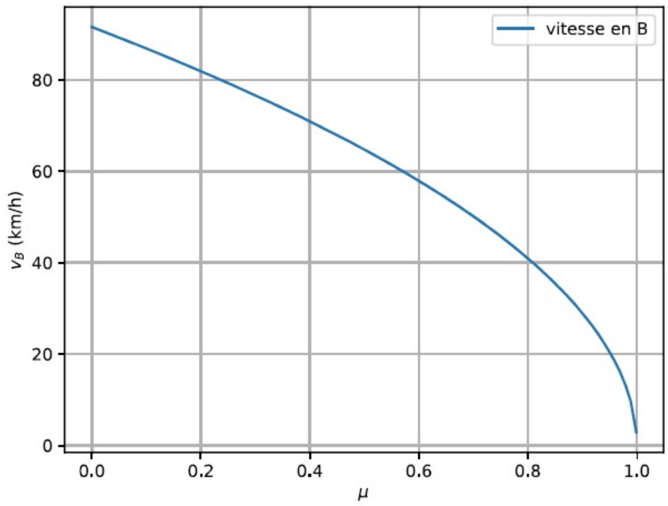

FIGURE 2 : Tracé de l'expression de v_B en fonction du coefficient de frottement μ pour le toboggan « le géant » de WaveIsland ($\alpha = 45\ ^\circ$).

Q4. En déduire l'expression littérale de la valeur α minimale permettant à un passager d'arriver en bas d'un toboggan de forme similaire mais moins incliné, le coefficient de frottement passager-toboggan étant supposé égal à celui du toboggan « le géant ». Faire l'application numérique.

Partie II. Étude d'un toboggan avec « tremplin »

On s'intéresse maintenant à un toboggan dont la sortie est constituée d'un petit « tremplin » (partie BC sur la figure 3).

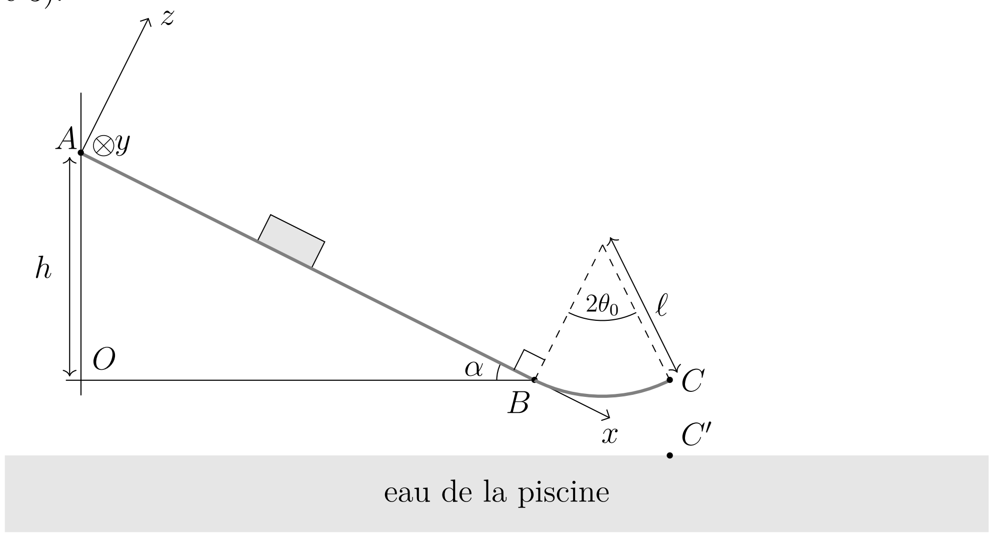

FIGURE 3 : Toboggan rectiligne avec une sortie en « tremplin ».

Q5. Établir la relation entre les angles α et θ_0.

1) Étude préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point matériel M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon ℓ. Le mouvement a lieu dans le plan xOy de la figure 4. On néglige tout frottement. On note $\overrightarrow{g}$ le vecteur champ de pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.

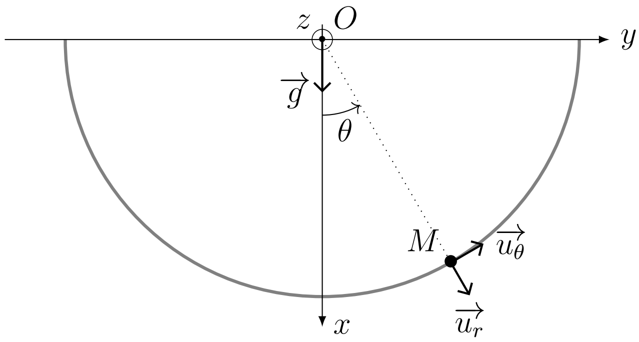

FIGURE 4 : Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé), il n'y a pas de mouvement selon Oz.

Q6. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de $\theta(t)$.

Q7. Résoudre cette équation dans des conditions que l'on précisera. On supposera pour cette question qu'initialement $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Q8. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$, en faisant précisant les valeurs minimales et maximales atteintes ainsi que la période des oscillations.

2) Retour au cas du toboggan avec « tremplin »

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_B à l'entrée du « tremplin » de rayon ℓ (voir figure 3). Toute la descente s'effectue en absence de frottements.

Q9. Établir en appliquant le principe fondamental de la dynamique (et sans utiliser un raisonnement énergétique), l'expression de v_C en fonction de v_B.

Q10. La surface de l'eau est située 1,0 m en dessous de B et C. On appelle C' le point de la surface de l'eau de la piscine situé sous le point C. Établir à quelle distance d de C' le passager entrera dans l'eau. On négligera la poussée d'Archimède et les frottements dans l'air. Faire l'application numérique avec $\alpha = 45\ ^\circ$. Si la réponse à la question Q1 n'avait pas été trouvée, on prendra $v_B = 25{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.