

TD OSC 1

Exercice 5 :

Oscillateur harmonique horizontal: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

or à $t=0$ $\dot{x}=0 \Rightarrow \varphi=0$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_{p,d} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$E_c = E_{p,d} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\Leftrightarrow \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{k}{m} \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\text{or } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ donc } E_c = E_{p,d} \text{ pour } \sin^2(\omega_0 t) = \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\text{soit } |\sin(\omega_0 t)| = \frac{\sqrt{2}}{2} (= |\cos(\omega_0 t)|) \quad \text{soit } \boxed{|x(t)| = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

$$Q2. \quad E_c = E_{p,d} \text{ pour } \sin(\omega_0 t) = \pm \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \omega_0 t = \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}$$

donc 4 fois par cycle

$$\text{Soit } t_1 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{et } t_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

Entre 2 réalisations il s'écoule $\Delta t = \frac{\pi}{2\omega_0}$

Q3. Pour $x = \frac{A}{2}$ on a $\frac{A}{2} = A \cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{4} = 1 - \sin^2(\omega_0 t))$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_0 t) = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad \text{AN: } E_c = \frac{1}{2} m (A \omega_0)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} m A^2 \omega_0^2$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad \text{AN: } E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{k A^2}{8}$$

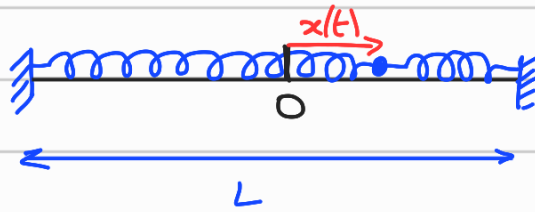
$$E_{\text{tot}} = \frac{k}{2} A^2$$

$$\% E_c = \frac{\frac{3}{8} m A^2 \omega_0^2}{\frac{k}{2} A^2} \quad \text{avec } \omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\% E_c = \frac{3 \cdot 2 m A^2 k}{8 k m A^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Pour un déplacement de $\frac{A}{2}$, 75% de l'énergie est sous forme d'énergie cinétique.

Exercice 6 :



Q1. On étudie le système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- réaction du support $\vec{R}_N$
- force de rappel élastique 1 : $\vec{f}_1 = -k(l_1 - l_0)\vec{u}$
- force de rappel élastique 2 : $\vec{f}_2 = -k(l_2 - l_0)(-\vec{u})$
 $\vec{f}_2 = k(l_2 - l_0)\vec{u}$

$$\text{A l'équilibre } m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

On projette suivant la direction horizontale :

$$-k(l_{1eq} - l_0) + k(l_{2eq} - l_0) = 0$$

$$\text{Or } l_1 + l_2 = L \Rightarrow l_1 = L - l_2$$

$$\Rightarrow -k(L - l_{2eq} - l_0) + k(l_{2eq} - l_0) = 0$$

$$-kL + 2kl_{2eq} = 0 \Rightarrow l_{2eq} = \frac{L}{2}$$

Q2. On applique le principe fondamental de la dynamique au système :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m\vec{a}$$

En projetant suivant $\vec{u}_x$ on obtient :

$$-k(l_1 - l_0) + k(l_2 - l_0) = m\ddot{x}$$

$$\text{or } l_1(t) = l_{eq} + x(t) \text{ et } l_2(t) = l_{eq} - x(t)$$

$$\Rightarrow -k(l_{eq} + x - l_0) + k(l_{eq} - x - l_0) = m\ddot{x}$$

$$-2kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

$\Rightarrow$ équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

Q3. Solution générale : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

$$x_0 = A \text{ et } B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t).$$



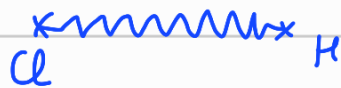
z change de signe à chaque extrémum de x .

$|z|$ est maximale à chaque passage par la position d'équilibre.

Exercice 7 :

Q1. L'atome de chlore étant beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène on peut considérer que c'est l'atome d'hydrogène qui bouge.

Q2. On utilise le modèle de l'O.H :
où la liaison est représentée par un ressort.



$$\text{On a } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{k = m\omega_0^2}$$

avec $m = m(\text{H}) = \frac{M(\text{H})}{N_A}$
et $\omega_0 = 2\pi \times f$.

$$\text{AN: } k = \frac{10^{-3}}{602 \cdot 10^{23}} \times (2\pi)^2 \times (8,5 \cdot 10^{13})^2$$

$$\underline{k = 4,7 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}$$

⚠ m en kg dans l'AN.

Q3. L'énergie mécanique de l'OH étant constante, elle vaut l'énergie cinétique lorsque l'énergie potentielle élastique est nulle (l'énergie cinétique est alors maximale).

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}} \quad \text{soit} \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{h \cdot f}{m}}$$

$$\text{AN: } v_{\max} = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 8,5 \cdot 10^{13}}{10^{-3} / 602 \cdot 10^{23}}}$$

$$v_{\max} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Q4. Lorsque la vitesse de l'atome H est nulle, son énergie mécanique est égale à son énergie potentielle élastique d'où $E_m = \frac{1}{2} k A^2$

$$A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}} \quad \text{soit} \quad A = \sqrt{\frac{h \cdot f}{k}}$$

$$\text{AN: } A = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 8,5 \cdot 10^{13}}{4,7 \cdot 10^2}}$$

$$\underline{A = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \quad (= 110 \text{ pm})$$

Comparaison avec la valeur tabulée de la liaison: $d_{\text{H-O}}$

$$\frac{A}{d_{\text{H-O}}} \times 100 = 9\%$$

Exercice 8 :

Q1. Il faut s'intéresser à 2 positions d'équilibre :

- voiture posée au sol $\rightarrow$ les ressorts ont une longueur l_{eq}
- voiture soulevée, à la limite du décollement $\rightarrow$ les ressorts ont une longueur l'_{eq} .

$\Rightarrow$ On cherche $l'_{eq} - l_{eq}$.

* système {carrosserie} étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

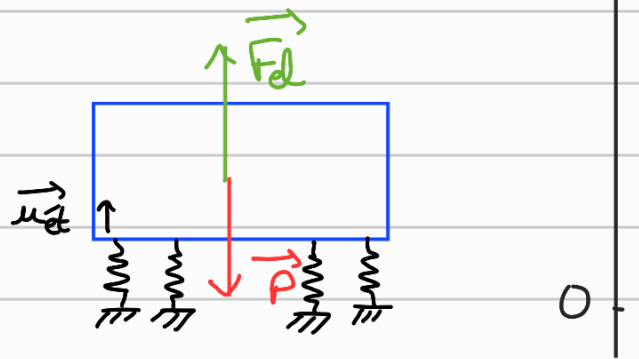
$$\vec{P} = m_1 \vec{g} = -m_1 g \vec{u}_z$$

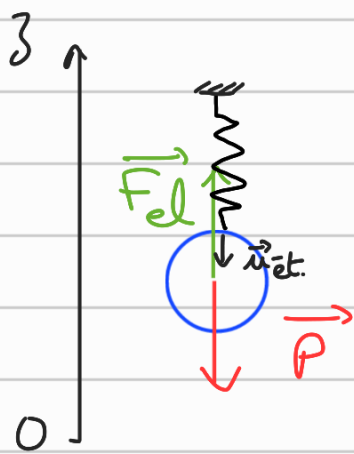
$$\vec{F}_d = -4k(l - l_0) \vec{u}_d = -4k(l - l_0) \vec{u}_z$$

A l'équilibre "voiture posée au sol" : $\vec{P} + \vec{F}_d = \vec{0}$

En projection sur Oz : $-m_1 g - 4k(l_{eq} - l_0) = 0$

* système {1 roue} étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.





Bilan des forces :

$$\vec{P} = m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{u}_3$$

$$\vec{F}_{el} = -k(l - l_0) \vec{u}_{ekt} = k(l - l_0) \vec{u}_3$$

(+ $\vec{R}_N$ en cas de contact avec le sol)

A l'équilibre "limite du décollement" ($\Rightarrow \vec{R}_N = \vec{0}$)

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe Oz : $-m_2 g + k(l'_{eq} - l_0) = 0$

On a donc le système :

$$\begin{cases} -m_2 g + k(l'_{eq} - l_0) = 0 \\ -m_1 g - 4k(l_{eq} - l_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k l'_{eq} = m_2 g + k l_0 \\ k l_{eq} = \frac{-m_1 g}{4} + k l_0 \end{cases}$$

$$k l_{eq} = \frac{-m_1 g}{4} + k l_0$$

$$l'_{eq} - l_{eq} = \frac{m_2 g + k l_0 + \frac{m_1 g}{4} - k l_0}{k}$$

$$l'_{eq} - l_{eq} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 \right) \frac{g}{k}$$

$$\text{AN: } l'_{eq} - l_{eq} = \left(\frac{700}{4} + 37,5 \right) \cdot \frac{981}{6500} = \underline{0,321 \text{ m}}$$

Q2. On étudie le système {carrosserie}
dans R_t galiléen :

$$\text{D'après le PFD: } \Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a}$$

$$-m_1 g \vec{u}_z - 4k(l - l_0) \vec{u}_z = m \vec{a}$$

On choisit l'origine du repère au niveau
du point de fixation du ressort sur la roue:
 $l = z$ avec z = la hauteur de la
fixation du ressort à
la carrosserie.

En projection sur (O_z)

$$-m_1 g - 4k(z - l_0) = m \ddot{z}$$

On avait au préalable montré que :

$$-m_1 g - 4k(l_{eq} - l_0) = 0$$

$$m_1 g + 4k l_{eq} = 4k l_0 \Rightarrow l_0 = l_{eq} + \frac{m_1 g}{4k}$$

$$-m_1 g - 4k z + 4k \left(l_{eq} + \frac{m_1 g}{4k} \right) = m \ddot{z}$$

$$m \ddot{z} + 4k z = 4k l_{eq}$$

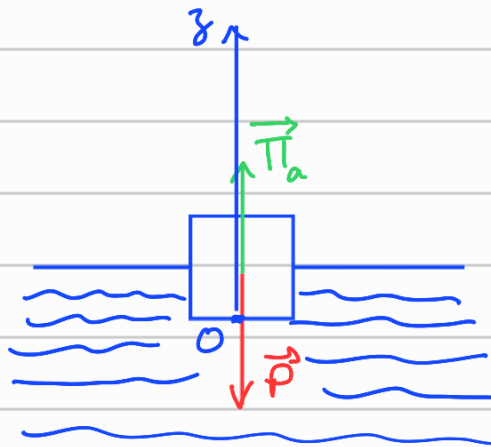
$$\ddot{z} + \frac{4k}{m_1} z = \frac{4k}{m_1} l_{eq}.$$

Equation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m_1}}$ et de position d'équilibre $l_{eq} = l_0 - \frac{m_1 g}{4k}$.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{4k}}$$

$$AN: T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{700}{4.6500}} = \underline{1,03 \text{ s}}$$

Exercice 9 :



$$\ddot{z} + \frac{\rho_l \cdot g}{\rho_c} z = 0$$

$$z(t) = (l_{eq} - l_0) \cos(\omega_0 t)$$

$$\rho_c < \frac{\rho_l}{2}$$