SIG2 : Étude de phénomènes ondulatoires

En 1690, Christian Huygens propose une théorie ondulatoire de la lumière et entre en conflit avec Newton, qui penche pour une nature corpusculaire. Au début du XIX^{e} siècle, Thomas Young (médecin, philosophe, botaniste et physicien anglais), reprend l'idée de Huygens qu'il justifie par des expériences de diffraction en obtenant ce qu'il nomme des interférences. C'est la théorie électromagnétique énoncée par Maxwell en 1873 qui confirme le caractère ondulatoire de la lumière.

Plan du cours

À savoir par ♥

✓ Phénomène de diffraction : conditions d'existence, formule, exemples.
✓ Phénomène d'interférences : origine physique, déphasage des deux ondes, conditions d'interférences destructives/constructives.
✓ Expérience des trous d'Young : description, formule de l'interfrange.
✓ Onde stationnaire : forme mathématique, évolution temporelle, modes propres.

À savoir faire

✓ Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives de 2 ondes issues dé 2 sources ponctuelles en phase dans un milieu de propagation homogène.
✓ Trous d'Young : déterminer les lieux d'interférences constructives et destructives, relier le déphasage entre les 2 ondes à la différence de chemin optique, établir l'expression de la différence de chemin optique linéarisée et celle de l'interfrange.
✓ Onde stationnaire sur une corde : établir la somme des ondes incidente et réfléchie et la mettre sous la forme d'une onde stationnaire, établir les fréquences des modes propres, expliquer le lien avec les instruments de musique.

I Phénomène de diffraction (rappel OG1)

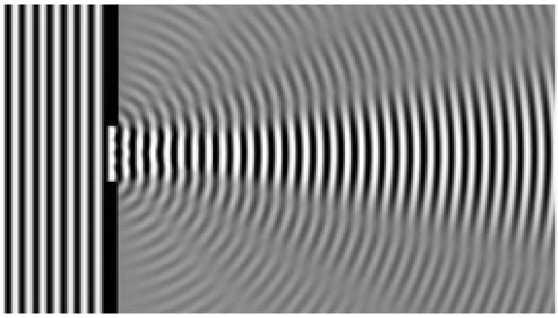
I.1 Relation de la diffraction

Expérience → TP T$^{\text{le}}$

On a évoqué le phénomène de diffraction des ondes lumineuse (OG1), mais ce phénomène ne s'applique pas qu'à la lumière, il s'applique à tous les phénomènes ondulatoires : les ondes acoustiques, la houle sur la mer, les ondes électromagnétiques, etc. C'est ce phénomène qui permet de recevoir le signal émis par une source sans être en face de celle-ci.

Définition

Diffraction : modification des propriétés d'une onde lorsqu'on limite sa propagation par un obstacle. Ce phénomène se manifeste généralement par une redistribution de l'intensité émergente dans certaines directions privilégiées. C'est un phénomène très général qui met en évidence le caractère ondulatoire d'un phénomène.
Exemple : diffraction d'une onde mécanique observée grâce à une cuve à ondes :



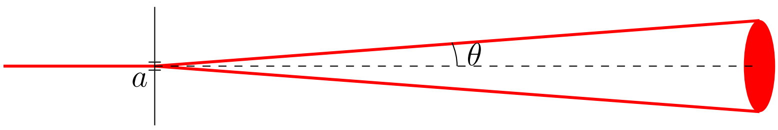
Formule

Les lois de l'optique géométrique ne sont pas respectées au niveau d'un obstacle qui masque partiellement un rayon lumineux. Ce phénomène est appelé **diffraction**.

Formule de la diffraction : Si l'onde incidente est plane et monochromatique de longueur d'onde λ, l'onde diffractée par un obstacle de taille caractéristique a, est un faisceau dont la dispersion angulaire perpendiculairement à la fente est :

$$\sin(\theta) \approx \frac{\lambda}{a}$$

avec : θ = valeur de l'angle de diffraction pour la première extinction
λ = longueur d'onde en m
a = taille de l'ouverture en m



Le phénomène de diffraction n'est perceptible que si l'angle θ n'est pas trop petit. Si $a \gg \lambda$ c'est l'approximation de l'optique géométrique qui reste valide.

Remarques

Pour les observations en optique :

- La tache centrale a une largeur angulaire 2θ.
- Les taches secondaires sont deux fois moins larges que la tache centrale.
- La relation s'écrit avec un signe « $=$ » si l'ouverture est rectangulaire de largeur a.
- Si l'obstacle a une forme circulaire de diamètre D, la relation est $\sin(\theta) = 1,22\dfrac{\lambda}{D}$.
- Pour les ondes lumineuses, le phénomène de diffraction se produit pour des obstacles de taille jusqu'à une centaine de fois λ, soit de l'ordre de 1 à 100 µm.

I.2 Conséquences de la diffraction

En optique, l'ouverture (= l'obstacle) est constituée par la monture de l'objectif. Lorsqu'on réalise des observations à grande distance (ou dans le plan focal d'une lentille convergente), on observe une tache circulaire brillante appelée tache d'Airy, au lieu d'une image ponctuelle. Cela limite le pouvoir de résolution des instruments. On a donc intérêt à utiliser des lentilles de grand diamètre pour maximiser a et limiter θ.

Pour les ondes sonores audibles, on a calculé dans SIG1 que $17\,\text{mm} < \lambda < 17\,\text{m}$, donc la diffraction intervient constamment avec les objets du quotidien !

II Phénomène d'interférences

II.1 Mise en évidence du phénomène

Simulation 1 : ondes sonores (+ TP 16)

`https://phet.colorado.edu/sims/html/sound-waves/latest/sound-waves_all.html?locale=fr`

On branche 2 haut-parleurs sur le même générateur de signaux de même fréquence, et on place un récepteur face aux émetteurs.

Q1. Qu'observe-t-on lorsque le récepteur se déplace parallèlement à la droite reliant les 2 émetteurs ?

Q2. Comment s'appelle le phénomène observé ici ?

Q3. En terminale, avec quels autres types d'ondes avez-vous déjà observé ce phénomène ? Quel est le nom de cette expérience ?

Simulation 2 : cuve à ondes

`https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/cuve_ondes/index.php`

Une cuve à ondes est remplie d'un film d'eau. Un vibreur permet de générer une onde de surface en soufflant périodiquement à la surface de l'eau.

Q1. Quelle est la forme de l'onde générée par une seule source ?

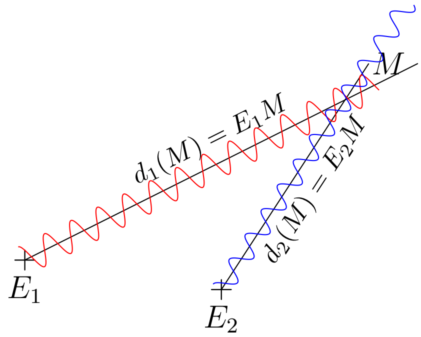
Q2. Donner deux grandeurs qui caractérisent cette onde.

Q3. Qu'observe-t-on lorsqu'on utilise deux sources (qui vibrent à la même fréquence) ?

Définition

Interférences : Lorsque deux ondes de même nature et synchrones (= de même fréquence) parviennent en un point M de l'espace, elles se superposent : leurs signaux s'additionnent. C'est le phénomène d'**interférences**.
L'amplitude de l'onde résultante de la superposition de plusieurs ondes est différente de la somme des amplitudes individuelles.

II.2 Notion de déphasage entre deux ondes



Soient deux sources synchrones émettant des ondes de même pulsation ω, de pulsation spatiale (= nombre d'onde) $k = \dfrac{\omega}{c}$, de phases à l'origine des temps φ_{01} et φ_{02} et d'amplitudes respectives S_{1m} et S_{2m}. Au point M, on observe la superposition des deux ondes.

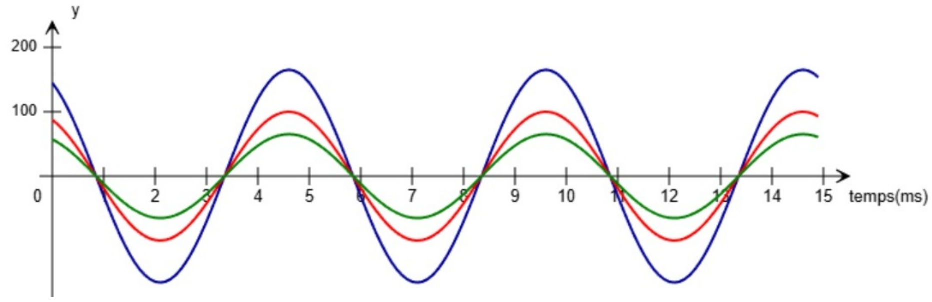
- Donner l'expression du signal issu de la source E_1 en un point M de l'espace distant d'une distance E_1M de S_1 :

- Même question pour le signal issu de la source E_2.

- Les deux ondes qui se superposent en M sont déphasées car le chemin parcouru par chacune des deux ondes entre la source et M est différent. Que vaut, au point M, le déphasage de l'onde issue de E_2 par rapport à celle issue de E_1 ($\varphi_{2/1}$) ?

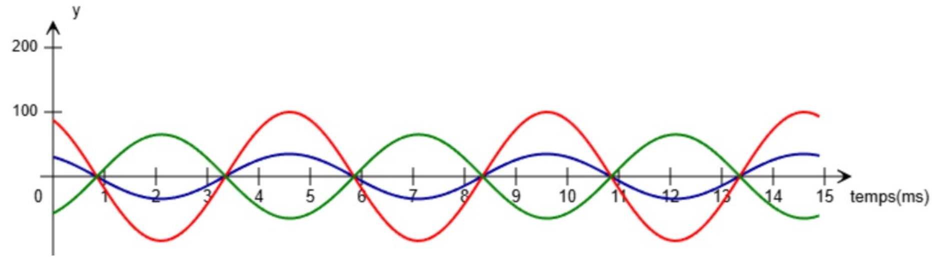
Valeurs remarquables du déphasage :

- $\varphi_{2/1} = 0$ (ou $2\,k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$) :



  s_1 et s_2 ont leurs maxima simultanément, les signaux sont dits **en phase**. L'amplitude résultante est supérieure à celle de s_1 et celle de s_2, on parle d'interférences **contsructives**.

- $\varphi_{2/1} = \pi$ (ou $\pi + 2\,k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$) :



  s_1 est maximal quand s_2 est minimal (et inversement), les signaux sont dits **en opposition de phase**. L'amplitude résultante est inférieure à celle de s_1 et à celle de s_2, on parle d'interférences **destructives**.

II.3 Conditions d'interférences constructives et destructives

Le signal résultant est la somme des deux signaux en M et s'écrit en M, à t : $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$.

a) Impact du déphasage sur l'amplitude résultante

- Que vaut l'amplitude de l'onde résultante lorsque les deux signaux sont en phase ?

- Même question lorsque les signaux sont en opposition de phase ?

- Que peut-on dire de ces valeurs quand les deux signaux interfèrent ont une amplitude égale ($S_{1m} = S_{2m}$) ?

b) Somme de deux ondes en tout point M

Démonstration

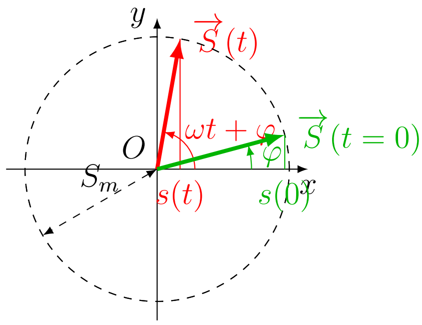
Déterminer l'expression du signal résultant de la superposition des ondes s_1 et s_2 en M, en fonction de φ_1 et φ_2. Utiliser la représentation de Fresnel pour déterminer son amplitude.

Représentation de Fresnel

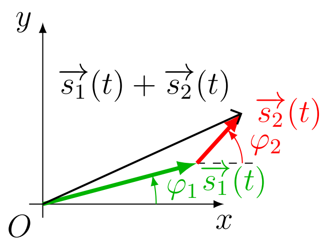
La **représentation de Fresnel** est la représentation graphique de signaux dépendant du temps de façon sinusoïdale → animation ici

À tout signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe un vecteur $\overrightarrow{S}$ dans le plan cartésien (Oxy) :

- de norme $\left\|\overrightarrow{S}\right\| = S_m$
- et faisant un angle de $\omega t + \varphi$ avec l'axe (Ox) : $\left(\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{S}}\right) = \omega t + \varphi$



Le vecteur $\overrightarrow{S}$ tourne dans le plan (Oxy), autour de l'axe (Oz), à la vitesse angulaire ω, il fait un tour en $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. **Utilisation pour sommer des signaux sinusoïdaux :**



En notant $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s_1} + \overrightarrow{s_2}$, on a : $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

Démonstration

Déterminer dans quelles conditions l'amplitude résultante est maximale et déterminer son expression. Vérifier la cohérence avec la condition établie précédemment.

Démonstration

Mêmes questions pour l'amplitude minimale.

Démonstration

Déterminer l'expression de $s(t)$ et son amplitude si les 2 ondes s_1 et s_2 ont même amplitude (soit $S_{1m} = S_{2m} = A$).

Rappel : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

♥ Définitions

Interférences constructives et destructives : On parle d'interférences

— **constructives** en M quand l'amplitude S_m du signal $s(M,t)$ résultant en M est maximale ;
— **destructives** en M quand l'amplitude S_m du signal $s(M,t)$ résultant en M est minimale.

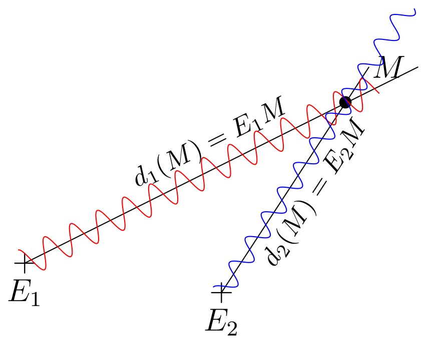
Différence de marche : Lorsque 2 ondes se propagent depuis leurs sources jusqu'en un point M , elles parcourent des chemins différents de longueurs respectives $d_1(M)$ et $d_2(M)$, dépendant de la position du point M considéré.
La **différence de marche en** M entre les deux signaux est définie par : $\delta(M) = d_2(M) - d_1(M)$

♥ Formule

Lorsque les deux ondes proviennent d'une même source (ce qui est quasiment toujours le cas), alors $\varphi_{01} = \varphi_{02}$.
Les deux ondes étant passées par des chemins différents, il existe une différence de marche $\delta_{2/1}(M)$ et un déphasage $\Delta\varphi_{2/1}(M)$ reliés par :

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = -kE_2M + kE_1M = -\frac{2\pi}{\lambda}(\underbrace{E_2M - E_1M}_{=\delta_{2/1}(M)}), \text{ soit :}$$

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda}\delta_{2/1}(M)$$



♥ Formules

— **Conditions d'interférences constructives en** M **:** le déphasage entre les deux ondes est un multiple de 2π ($\Leftrightarrow$ la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde) :

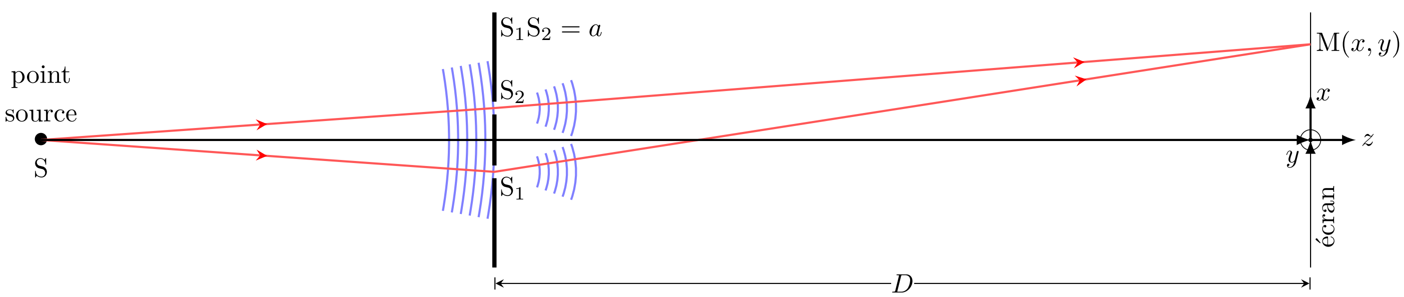
$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = 2p\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad \delta(M) = p\,\lambda \ , \ \ p \in \mathbb{Z}$$

— **Conditions d'interférences destructives en** M **:** le déphasage entre les deux ondes est un multiple impair de π ($\Leftrightarrow$ la différence de marche est un multiple impair de la demie longueur d'onde) :

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = (2p+1)\pi \quad \Leftrightarrow \quad \delta(M) = (2p+1)\frac{\lambda}{2} \ , \ \ p \in \mathbb{Z}$$

II.4 Cas des trous d'Young

Un faisceau de lumière éclaire une plaque percée de deux trous : ils diffractent la lumière et se comportent comme deux sources ponctuelles. On observe sur un écran parallèle à la plaque :



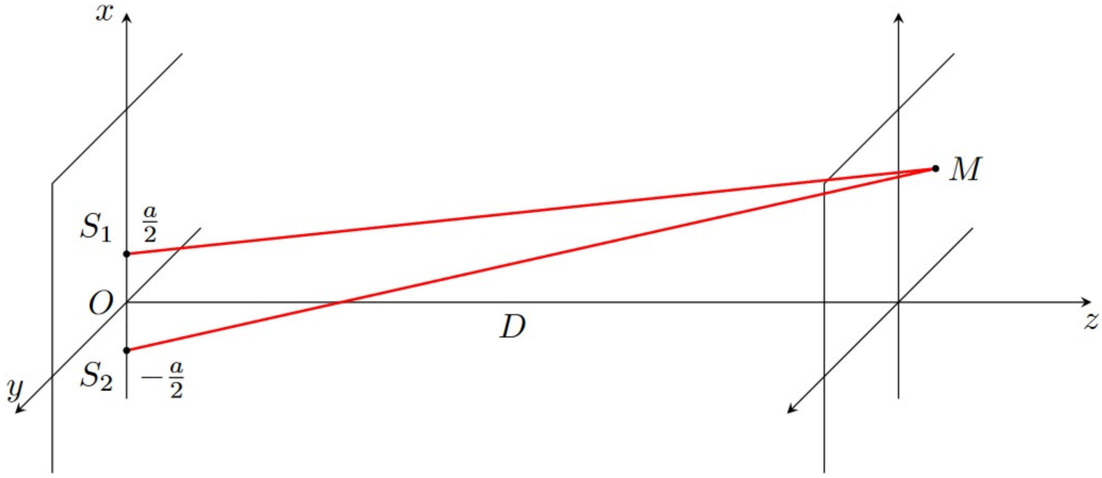
L'indice optique de l'air n étant très proche de 1, on considère que les ondes lumineuses se propagent à la vitesse $v = \dfrac{c}{n} \approx c$.

Pour déterminer l'expression de la différence de marche entre les ondes issues des sources S_1 et S_2 en M, on utilise la formule d'approximation :

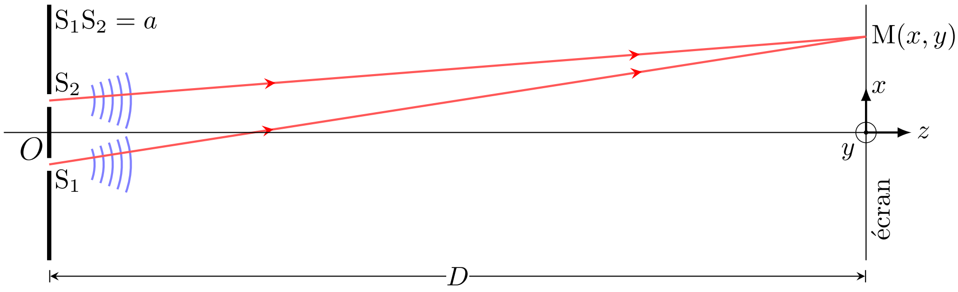
$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Démonstration

Déterminer la différence de chemin optique (= différence de marche car on considère $v \approx c$) au point $M(x, y)$ de l'écran, avec $a \ll D$, $x \ll D$ et $y \ll D$.



Formule



Dans le dispositif des trous d'Young placés sur la droite (Ox), la différence de chemin optique au point M, de coordonnées (x, y, D) vaut :

$$\delta \approx \frac{ax}{D}$$

Remarque

Les récepteurs de l'onde lumineuse (œil ou photorécepteur), ayant un temps de réponse trop long pour suivre l'évolution temporelle des variations de l'onde lumineuse, ils sont sensibles à l'intensité lumineuse, qui est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde lumineuse I au point considéré, telle que :

$$I = \frac{1}{2} K A^2(M)$$

avec $s(M, t) = A(M)\cos(\omega t + \varphi(M))$ et K une constante multiplicative.
Les zones d'interférences constructives, où l'amplitude est maximale, sont donc des zones brillantes, et les zones d'interférences destructives, où l'amplitude est minimale, sont donc des zones sombres.

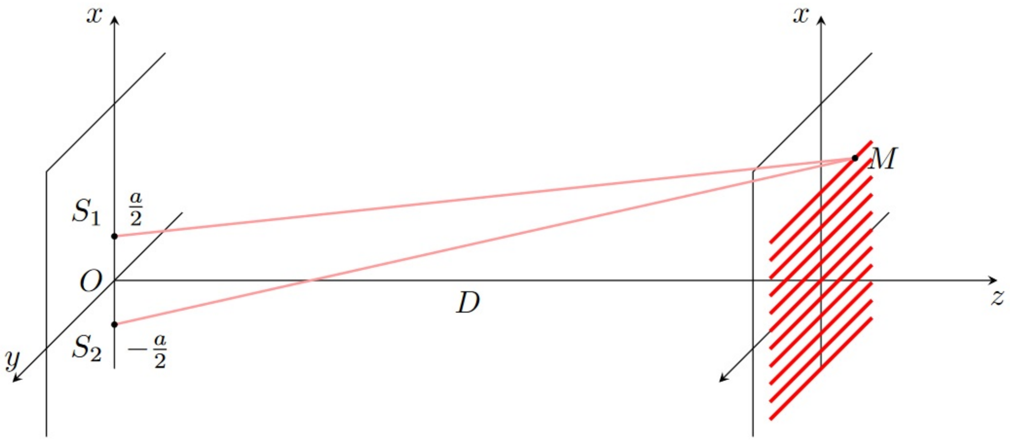
Démonstration

Utiliser la condition d'interférences constructives pour déterminer la position des franges brillantes.

Démonstration

En déduire l'interfrange (= distance entre deux franges brillantes consécutives).

Formule



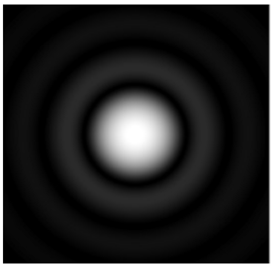
La figure d'interférence produite par les trous d'Young S_1 et S_2 est formée de franges rectilignes, perpendiculaires à S_1S_2, et régulièrement espacées de l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda \times d}{a}$$

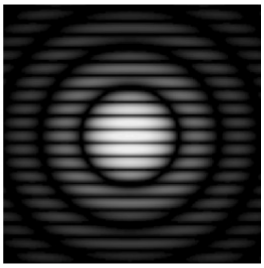
avec : $a = S_1S_2$ en m
D = distance entre le plan contenant les sources et l'écran en m
λ = longueur d'onde de la radiation lumineuse en m
($\approx$ sa longueur d'onde dans le vide λ_0 car $n_{\text{air}} \approx 1$)

Remarque

C'est grâce à la diffraction que l'on obtient un champ d'interférence dans lequel on observe des franges. Une description complète du phénomène observé fait donc appel à la théorie de la diffraction. Il en ressort que la figure d'interférence observée est modulée par la figure de diffraction d'un trou (dans le cas des trous d'Young) ou d'une fente (dans le cas des fentes d'Young). L'interfrange est inchangée. Le résultat des calculs reste donc valable.



1 trou



2 trous

III Ondes mécaniques stationnaires

III.1 Onde le long d'une corde fixée à ses deux extrémités

Vidéo + simulation :

https://www.youtube.com/watch?v=aVCqq5AkePI
https://www.youtube.com/watch?v=LTWHxZ6Jvjs
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php

On considère une corde fixée à ses deux extrémités (en $x = 0$ et $x = L$), le long de laquelle deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude se propagent en sens inverse :

— une onde n°1 (=onde incidente) se propageant selon $(+\overrightarrow{u_x})$,
— une onde n°2 (=onde réfléchie) qui se propage selon $(-\overrightarrow{u_x})$, provenant de la réflexion de l'onde incidente lorsqu'elle arrive en $x = L$.

Q1. Comment est définie une onde progressive ?

Q2. L'onde résultante vérifie-t-elle ces propriétés ? Pourquoi l'appelle-t-on « onde stationnaire » ?

♥ Définitions

Nœuds et ventres d'une onde stationnaire : Lorsque deux ondes sinusoïdales de même fréquence, de même amplitude se propagent en sens inverse, leur superposition donne naissance à une **onde stationnaire sinusoïdale**, que l'on peut caractériser par l'existence :

— de **nœuds de vibration** qui sont des points, notés N, de l'espace qui ne vibrent jamais, c'est-à-dire tels que, à tout instant, $s(x_N, t) = 0$.
— de **ventres de vibration** qui sont des points, notés V, de l'espace où la perturbation (vibration) y est à chaque instant maximale par rapport aux autres points de la corde.

L'**existence de nœuds et de ventres de vibration est une propriété caractéristique des ondes stationnaires.**

Démonstration

Comment écrire le signal associé à une onde stationnaire ?

Q1. L'onde incidente progressive sinusoïdale se propage selon $(+\overrightarrow{u_x})$. Le signal associé s'écrit :

Q2. Le milieu étant limité, il existe une onde réfléchie se propageant selon $(-\overrightarrow{u_x})$. Le signal associé s'écrit :

Q3. Le signal de l'onde résultante, s'écrit :

Q4. Utiliser la formule de trigonométrie $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ pour poursuivre le calcul :

Q5. Que peut-on dire des variables temporelle et spatiale dans l'expression obtenue ? Quelle est la conséquence de cela sur la vibration des points de l'espace ?

Formule

Écritue mathématique d'une onde stationnaire :

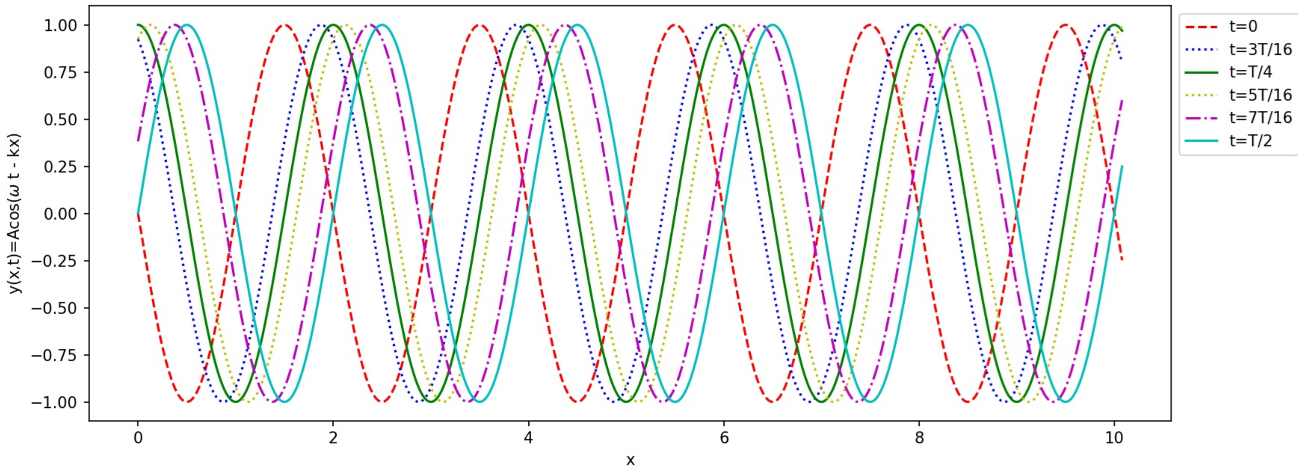
— Les signaux associés aux **ondes stationnaires** s'écrivent sous la forme d'un produit d'une fonction de la position et d'une fonction du temps :

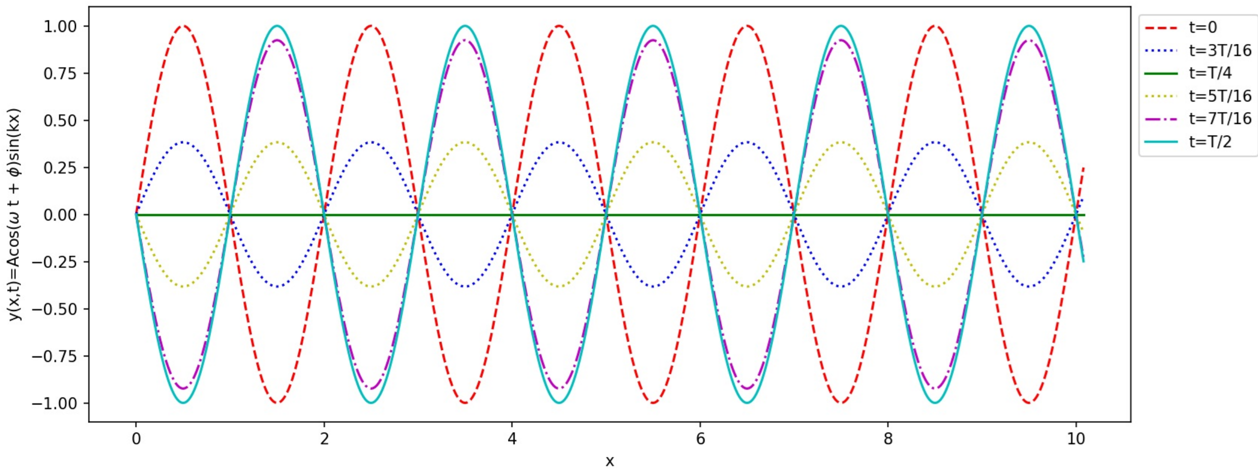
$$s(x,t) = f(x) \times g(t)$$

— Les signaux associés aux **ondes stationnaires sinusoïdales** s'écrivent sous la forme

$$s(x,t) = S_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right) \cos\left(kx + \psi\right)$$

Comparaison d'une onde progressive et d'une onde stationnaire au cours du temps :





III.2 Modes propres

La corde étudiée est fixée à ses deux extrémités, en $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites $\forall\ t \left\{ \begin{array}{lcl} s(x=0,t) & = & 0 \\ s(x=L,t) & = & 0 \end{array} \right.$, traduisant le fait qu'il n'y a aucun déplacement vertical aux deux extrémités.

Démonstration

Fréquence des modes propres

Le signal existant sur la corde s'écrit $s(x,t) = S_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right) \cos\left(kx + \psi\right)$

— Montrer que la condition aux limites en $x = 0$ impose $\psi = \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

— Montrer que la condition aux limites en $x = L$ impose une quantification du vecteur d'onde k (c'est-à-dire que seules certaines valeurs discrètes sont possibles).

— En déduire que la longueur d'onde, la pulsation et la fréquence sont également quantifiées en précisant les valeurs permises.

— Représenter (en fonction de x) les trois premiers modes propres, localiser les nœuds et les ventres.

— Déterminer les distances séparant deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs.

♥ Propriétés

Longueurs d'onde et fréquences des modes propres : Pour une corde fixée à ses deux extrémités, les conditions aux limites imposent une quantification des longueurs d'onde et des fréquences, avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Leftrightarrow L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad\qquad f_n = n\frac{c}{2L} = \frac{c}{\lambda_n}$$

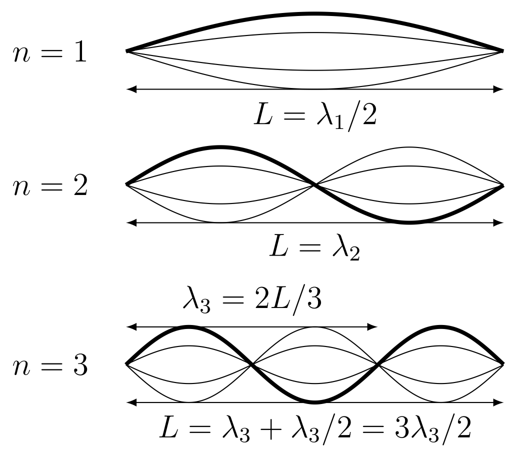
☆ Méthode

Comment retrouver facilement les fréquences des modes propres ?

❶ Représenter les 3 premiers modes propres de la corde fixée à ses deux extrémités (ci-contre).

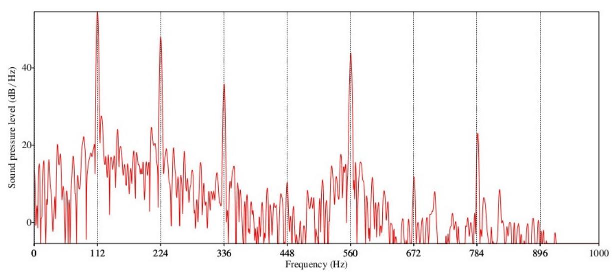
❷ Repérer le lien entre la longueur d'onde et la longueur de la corde pour ces trois premiers modes, puis généraliser au mode n, afin d'avoir λ_n.

❸ Utiliser la relation $f_n = \dfrac{c}{\lambda_n}$ pour en déduire les fréquences des modes propres.

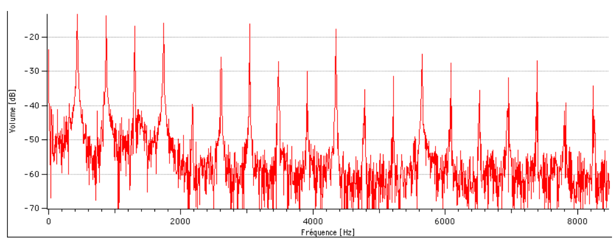


III.3 Lien avec les instruments de musique

Les cordes de violon et de guitare sont fixées à leurs deux extrémités. Lorsque le musicien excite la corde, en la frottant avec un archet pour le violon, en la grattant pour la guitare, un son est émis, mais le musicien ne sélectionne pas un mode propre donné. La vibration engendrée n'est pas un mode propre mais une superposition des différents modes propres possibles. Ci-dessous, sont représentés les spectres d'un la émis par une guitare et un violon. On constate la présence d'un grand nombre d'harmoniques, tous multiples de la fréquence du fondamental.



Spectre du son émis par la corde de La d'une guitare



Spectre du son émis par la corde de La d'un violon