OSC3 : Oscillateurs en régime forcé, résonances

Après avoir étudié la réponse indicielle et le régime libre des oscillateurs mécaniques et électriques, et mis en évidence une analogie dans l'équation régissant leurs évolutions (OSC2), on étudie dans ce chapitre leur réponse à une excitation entretenue. On choisit cette excitation sous forme d'un signal qui varie sinusoïdalement au cours du temps, ce qui est extrêmement important car dans de nombreux domaines, les signaux sont sous cette forme ou décomposables en une somme de fonctions sinusoïdales (courants électriques produits industriellement par des alternateurs, ondes lumineuses, ondes sonores, etc.)
Il est très intéressant d'introduire le concept d'impédance complexe, qui permet d'écrire les lois de l'électricité et de la mécanique en régime sinusoïdal forcé sous forme d'équations algébriques simples à résoudre.

Plan du cours

À savoir par ♥

- ✓ Les expressions mathématiques réelle et complexe associées à une grandeur en RSF, avec la signification des termes.
- ✓ L'expression du déphasage entre deux signaux.
- ✓ L'impédance complexes d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en RSF.
- ✓ Les opérations de dérivation et d'intégration pour un signal complexe.
- ✓ La loi des œuds et la loi des mailles en RSF.
- ✓ Les lois d'association pour les impédances complexes.
- ✓ Les ponts diviseurs de tension et d'intensité en RSF.

À savoir faire

- ✓ Établir l'expression de 'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
- ✓ Passer d'une équation différentielle linéaire à une équation complexe et inversement.
- ✓ Utiliser toutes les lois des circuits en notation complexe.
- ✓ Déterminer une impédance ou une admittance équivalente à une association.
- ✓ Déterminer l'amplitude et la phase d'une grandeur réelle à partir de son amplitude complexe.
- ✓ Étudier la réponse fréquentielle d'un circuit en intensité ou en tension.
- ✓ Relier l'acuité d'une résistance au facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.
- ✓ Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.

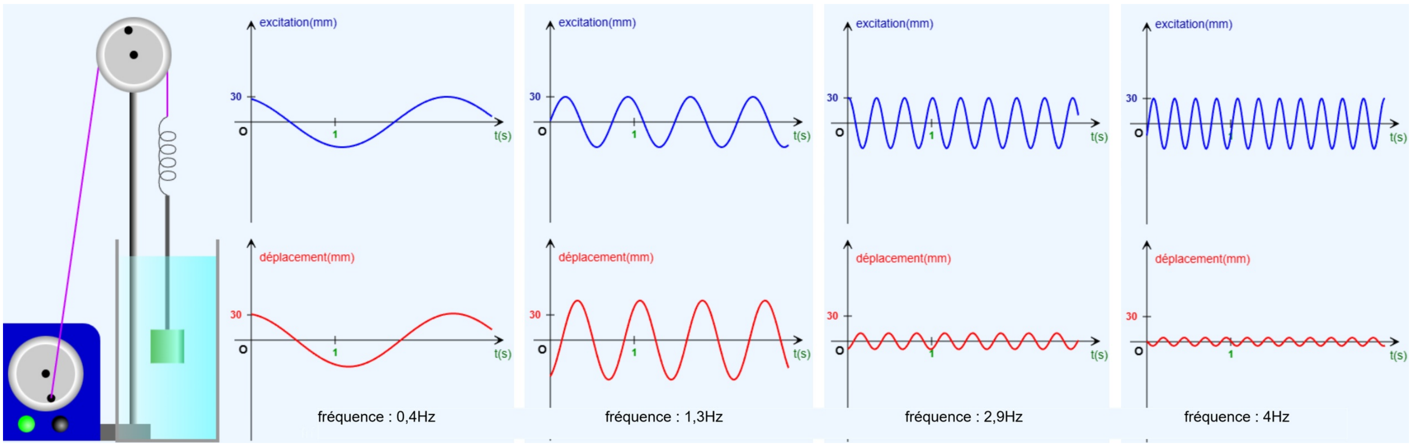
I Mise en évidence du phénomène de résonance

Si on impose à un système oscillant une perturbation qui se répète au cours du temps, quelle va être sa réponse ?

Simulation : excitation sinusoïdale d'un oscillateur mécanique

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

Un objet cylindrique de masse m est suspendu à un ressort de raideur k, et plongé dans un liquide exerçant une force de frottement fluide, proportionnelle à la vitesse, avec un coefficient h, qui dépend de la viscosité du liquide. Un dispositif formé de poulies permet d'imposer à l'oscillateur une excitation sinusoïdale.

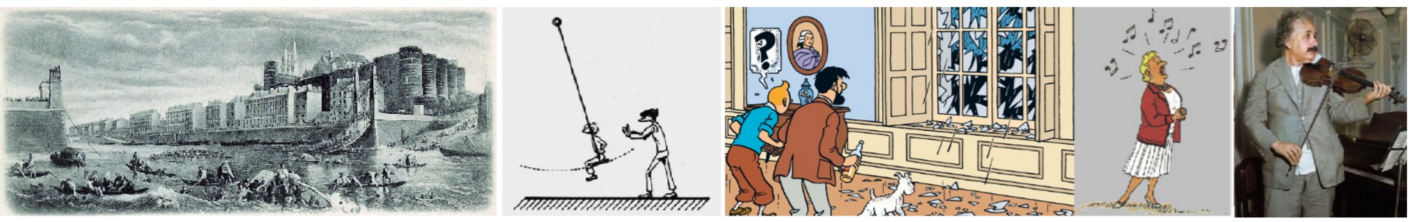


Observations :

Comment appelle-t-on le phénomène d'augmentation de l'amplitude de la réponse pour une fréquence d'excitation précise ?

Remarques

- On a modifié seulement la fréquence de l'excitation, pas son amplitude !
- On pourrait aussi s'intéresser à la vitesse de la masse m (réponse en vitesse).
- On représente graphiquement la réponse du système à une excitation sinusoïdale : amplitude et phase en fonction de la fréquence/pulstation.
- Le phénomène de résonance peut être néfaste ou bénéfique en fonction des situations/applications : exemples ci-dessous

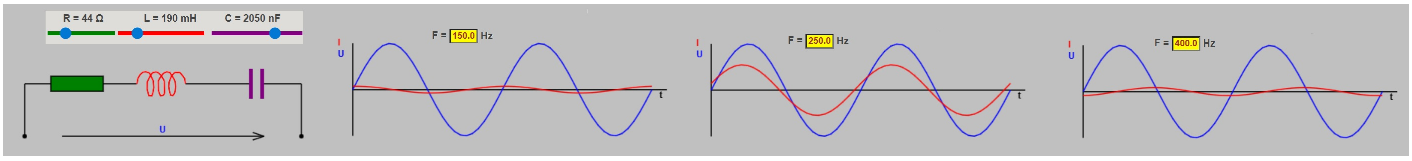


Exemples du phénomène résonance : Écroulement du pont d'Angers en 1850 sous l'effet du pas cadencé, enfant poussé sur une balançoire, verre cassé par la voix, caisse de résonance d'un violon.

Simulation : excitation sinusoïdale d'un oscillateur électrique

`https://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/rlcexci.html`

On étudie la réponse en intensité d'un circuit RLC série en examinant la tension aux bornes de la résistance.



On observe également un phénomène de résonance en intensité avec cette simulation, mais il existe aussi une résonance en tension, qui sera étudiée en détail dans ce chapitre.

II Mise en équation

Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique

Forme canonique

Forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur en RSF :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = A_0\cos(\omega\, t) \quad \text{ou} \quad \ddot{s} + + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = A_0\cos(\omega\, t)$$

avec :
- $\omega_0 =$ pulsation propre en rad·s^{-1}
- $Q =$ facteur de qualité (grandeur sans dimension)
- $\omega =$ pulsation du signal d'excitation en rad·s^{-1} ⚠ $\omega \neq \omega_0$

La solution générale de cette équation différentielle (linéaire à coefficients constants) est de la forme $s(t) = s_H(t) + s_P(t)$ avec :

- $s_H(t)$ une solution de l'équation homogène (= sans second membre)
- $s_P(t)$ une solution particulière **de la forme du second membre** $\rightarrow$ sinusoïdale

La solution de l'équation homogène s'annule rapidement ($\rightarrow$ OSC2) donc très vite on peu assimiler la solution générale à la solution particulière : $s(t) = s_P(t)$.

Propriété

Régime sinusoïdal forcé (RSF) : Très vite, la réponse d'un système linéaire (= régi par une équation différentielle à coefficients constants) à une excitation sinusoïdale est sinusoïdale de même pulsation que l'excitation, c'est le régime sinusoïdal forcé (RSF).

III Régime sinusoïdal forcé

III.1 Signaux sinusoïdaux

Rappels

• **Écriture d'un signal sinusoïdal :** $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_0)$

avec :

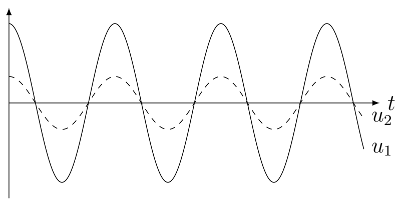
$$\begin{aligned} X_m &= \text{amplitude, de même unité que la grandeur } x \\ \omega &= \text{pulsation imposée par le générateur, en rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ &\ \text{(liée à la période } T \text{ et à la fréquence } f \text{ par : } \omega = 2\pi \times f = \frac{2\pi}{T} \\ \varphi_0 &= \text{phase à l'origine, en rad} \end{aligned}$$

• **Déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ entre deux signaux sinusoïdaux synchrones** $u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega t + \varphi_{10})$ et $u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \varphi_{20})$:

$$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t + \varphi_{20} - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10}$$

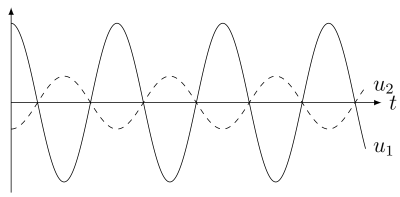
• **Déphasages particuliers :**

u_1 **et** u_2 **en phase :** $\Delta\varphi_{2/1} = 0$



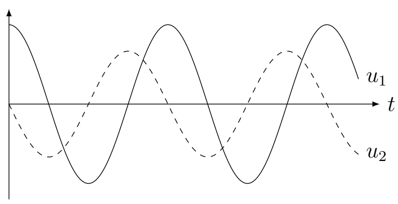
Les extrema sont atteints au même moment.

u_1 **et** u_2 **en opposition de phase :** $\Delta\varphi_{2/1} = \pm\pi$

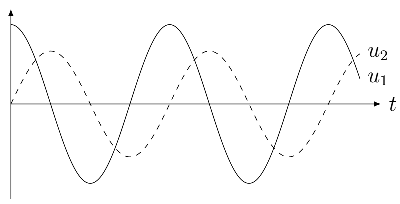


Quand l'un est minimal, l'autre est maximal.

u_2 **en quadrature avance** sur u_1 : $\Delta\varphi_{2/1} = \frac{\pi}{2}$



u_2 **en quadrature retard** sur u_1 : $\Delta\varphi_{2/1} = -\frac{\pi}{2}$



Les signaux sont dit « en quadrature de phase » lorsqu'un signal est nul au moment où l'autre est à son minimum ou à son maximum.

III.2 Signal complexe associé à un signal sinusoïdal

Définition

Au signal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe le signal complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t+\varphi)} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$$

avec $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$ = amplitude complexe

Rappels mathématiques

Écritures d'un nombre complexe :

$$\underline{x} = a + jb \quad = \quad re^{j\theta} \quad = \quad r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

avec : $r = |\underline{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \arg(\underline{x})$ tel que $\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{Im(\underline{x})}{Re(\underline{x})}$

Complexe conjugué : $\underline{x}^\star = a - jb$ (et $|x| = \sqrt{\underline{x}\underline{x}^\star}$)

Quotient et multiplication : Pour $\underline{x_1} = r_1 e^{j\theta_1}$ et $\underline{x_2} = r_2 e^{j\theta_2}$:

$$\arg\left(\frac{\underline{x_2}}{\underline{x_1}}\right) = \theta_2 - \theta_1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\underline{x_2}}{\underline{x_1}}\right| = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\arg\left(\underline{x_2} \times \underline{x_1}\right) = \theta_2 + \theta_1 \qquad \text{et} \qquad |\underline{x_2} \times \underline{x_1}| = r_2 \times r_1$$

Méthode

Si on connaît le signal complexe $\underline{x}(t)$, on peut déterminer :

- la valeur instantanée du signal réel en prenant la partie réelle : $x(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{x}(t)\right)$
- l'amplitude du signal réel en prenant le module : $X_m = |\underline{x}(t)| = |\underline{X_m}(t)|$
- la phase à l'origine des temps en prenant l'argument : $\varphi = \arg\left(\underline{x}(t)\right) - \omega t = \arg(\underline{X_m})$

Exercice de cours A

Q1. Donner les signaux réels associés aux signaux d'amplitudes complexes suivantes :

(a) $\underline{U_L} = U_m e^{-j\pi/3}$ (b) $\underline{I_1} = -j\dfrac{U_0}{R}$ (c) $\underline{I_2} = -I_m e^{j\pi/6}$

Q2. Donner le module des complexes ci-dessous :

(a) $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1 + j\omega\tau}$ (b) $\underline{u} = \dfrac{Ej\omega\tau}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t}$ (c) $\underline{U_m} = \dfrac{-E\omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$

III.3 Opérations sur les complexes

La notation complexe s'applique sans difficulté à des résultats d'opérations linéaires effectuées sur des signaux sinusoïdaux : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont deux signaux sinusoïdaux représentés par les complexes $\underline{s_1}(t)$ et $\underline{s_2}(t)$, le signal $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$ sera représenté par le complexe $\alpha \underline{s_1}(t) + \beta \underline{s_2}(t)$, avec α et β des réels.

Démonstration

On considère un signal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ de représentation complexe $\underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t}$.

Exprimer la dérivée temporelle $\dfrac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\underline{s}$:

Exprimer la primitive sinusoïdale (de constante d'intégration nulle) de $\underline{s}(t)$ en fonction de $\underline{s}$:

Démonstration

On considère deux signaux complexes $s_1(t) = S_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ de représentations complexes $\underline{s_1}(t) = \underline{S_{1m}} e^{j\omega t}$ et $\underline{s_2}(t) = \underline{S_{2m}} e^{j\omega t}$.

Exprimer le déphasage de $s_2(t)$ par rapport à $s_1(t)$:

Méthode

Dérivation :

— Pour dériver un signal complexe, il faut le **multiplier** par $j\omega$: $\dfrac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega \times \underline{s}(t)$

— Pour dériver deux fois un signal complexe, il faut le **multiplier** par $-\omega^2$: $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \times \underline{s}(t)$

Intégration : Pour intégrer un signal complexe, il faut le **diviser** par $j\omega$: $\displaystyle\int \underline{s}(t)\mathrm{d}t = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega}$

Déphasage : Le déphasage de $s_2(t)$ par rapport à $s_1(t)$ est : $\varphi_{2/1} = \arg\left(\dfrac{\underline{s_2}(t)}{\underline{s_1}(t)}\right)$

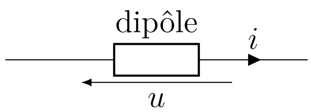
IV Étude de circuits électriques linéaires en RSF

IV.1 Impédances complexes

a) Impédance complexe d'un dipôle passif

Définitions

Impédance complexe :
On considère un dipôle linéaire passif, en convention récepteur, dont la tension à ses bornes s'écrit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et traversé par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.



L'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle est définie par : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$

On a donc : $\underline{Z} = \dfrac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \dfrac{U_m \times \cancel{e^{j\omega t}} \times e^{j\varphi_u}}{I_m \times \cancel{e^{j\omega t}} \times e^{j\varphi_i}} = \dfrac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = \dfrac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$

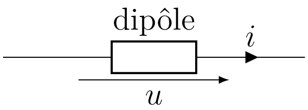
Soit : $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ avec :

$$\begin{aligned} Z &= \left|\underline{Z}\right| = \tfrac{U_m}{I_m} \quad \text{en Ohm } (\Omega) \\ \varphi &= \text{déphasage de la tension par rapport à l'intensité du courant} \\ &= \arg(\underline{Z}) = \arg\left(\tfrac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \varphi_u - \varphi_i \quad \text{en rad} \end{aligned}$$

Admittance complexe $\underline{Y}$: $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$ avec $Y = \left|\underline{Y}\right| = \frac{I_m}{U_m}$ en Siemens (S) ou en Ω^{-1}

Remarques

- La relation entre impédance et admittance complexes est $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$, ce qui donne la relation entre les arguments : $\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$.
- En convention générateur, on a $\underline{u} = -\underline{Z} \times \underline{i}$



b) Impédances de la résistance, de la bobine et du condensateur

Démonstration On étudie un conducteur ohmique de résistance R :

Q1. Établir l'expression de son impédance complexe et de son admittance complexe.

Q2. En déduire les comportements de la résistance à basse et haute fréquence.

Q3. Déterminer le déphasage entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Qui, de la tension ou de l'intensité, est en avance sur l'autre ?

Q4. Représenter u et i sur le même graphique en fonction du temps.

Démonstration On étudie une bobine d'inductance L :

Q1. Établir l'expression de son impédance complexe et de son admittance complexe.

Q2. En déduire les comportements de la résistance à basse et haute fréquence.

Q3. Déterminer le déphasage entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Qui, de la tension ou de l'intensité, est en avance sur l'autre ?

Q4. Représenter u et i sur le même graphique en fonction du temps.

Démonstration On étudie un condensateur de capacité C :

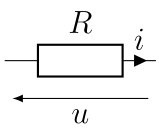
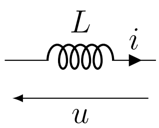
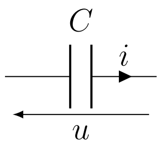
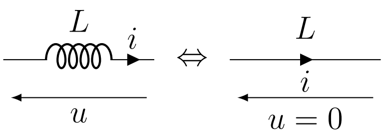
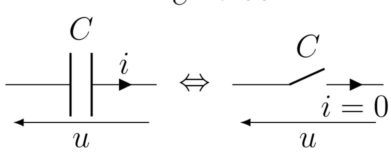
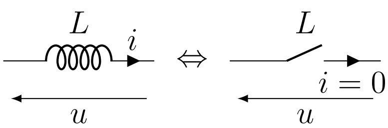
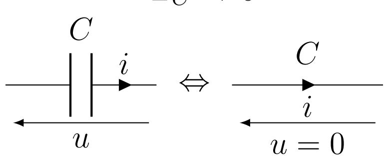
Q1. Établir l'expression de son impédance complexe et de son admittance complexe.

Q2. En déduire les comportements de la résistance à basse et haute fréquence.

Q3. Déterminer le déphasage entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Qui, de la tension ou de l'intensité, est en avance sur l'autre ?

Q4. Représenter u et i sur le même graphique en fonction du temps.

Bilan

	Résistance	Bobine	Condensateur
Schéma			
Impédance complexe	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_L} = jL\omega$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$
Impédance	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \dfrac{1}{C\omega}$
Admittance complexe	$\underline{Y_R} = \dfrac{1}{R}$	$\underline{Y_L} = \dfrac{1}{jL\omega}$	$\underline{Y_C} = jC\omega$
$\omega \longrightarrow 0$	$Z_R \to R$	$Z_L \to 0$ 	$Z_C \to \infty$ 
$\omega \longrightarrow \infty$	$Z_R \to R$	$Z_L \to \infty$ 	$Z_C \to 0$ 

IV.2 Lois de nœuds et loi des mailles en RSF

Les loi des nœuds et loi des mailles (ou lois de Kirchhoff) s'écrivent en RSF comme en régime permanent, tant que l'on se trouve dans le cadre de l'ARQS. On utilise **la notation complexe**.

♥ Lois de Kirchhoff

- Dans une maille orientée, la somme algébrique des tensions complexes est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{u_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{U_{m,k}} = 0$$

  avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche de u_k est dans le sens d'orientation de la maille, et $\varepsilon_k = -1$ si la flèche de u_k est en sens opposé au sens d'orientation de la maille.
- En un nœud, la somme algébrique des intensités complexes est nulle :

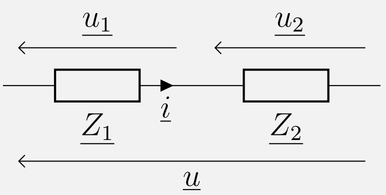
$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{I_{m,k}} = 0$$

  avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant i_k arrive dans le nœud et $\varepsilon_k = -1$ si le courant i_k part du nœud.

IV.3 Associations d'impédances

Démonstration

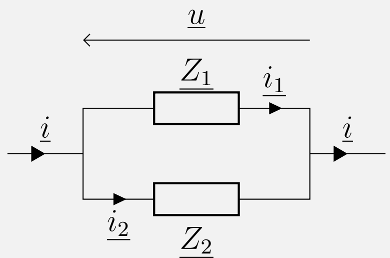
On considère deux dipôles d'impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en série. On note $\underline{u_1}$ la tension aux bornes de $\underline{Z_1}$ et $\underline{u_2}$ la tension aux bornes de $\underline{Z_2}$. La tension aux bornes de l'ensemble est notée $\underline{u}$, et l'intensité du courant à travers les deux résistances est notée $\underline{i}$. On se place en convention récepteur.



— Établir la relation donnant $\underline{u}$ en fonction de $\underline{i}$.
— En déduire que l'association des deux impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en série est équivalente à une unique impédance complexe $\underline{Z_{\text{éq}}}$ dont on donnera l'expression.

Démonstration

On considère deux impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en parallèle. On note $\underline{i_1}$ l'intensité du courant à travers $\underline{Z_1}$ et $\underline{i_2}$ l'intensité du courant à travers $\underline{Z_2}$. La tension aux bornes de l'association parallèle est notée $\underline{u}$, et l'intensité du courant qui arrive en entrée de l'association parallèle est notée $\underline{i}$. Tous les composants sont en convention récepteur.



— En utilisant une loi des nœuds, établir l'expression de $\underline{i}$ en fonction de $\underline{u}$.
— Mettre cette expression sous la forme $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z_{\text{éq}}}}$, en précisant l'expression de $\dfrac{1}{\underline{Z_{\text{éq}}}}$ en fonction de $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$.

Associations d'impédances complexes

Association en série :
L'impédance complexe du dipôle constitué par l'association série de deux dipôles d'impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ est :

$$\underline{Z_{\text{éq,S}}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$$

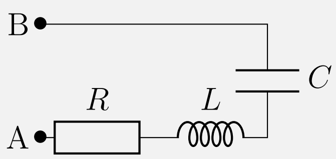
Association en parallèle :
L'impédance complexe du dipôle constitué par l'association parallèle de deux dipôles d'impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ vérifie :

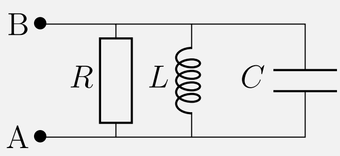
$$\frac{1}{\underline{Z_{\text{éq,P}}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{Y_{\text{éq,P}}} = \underline{Y_1} + \underline{Y_2}$$

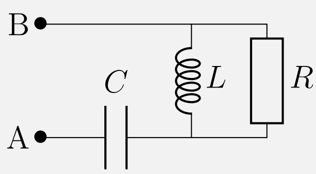
avec $\underline{Y}$ l'admittance complexe.

Exercice de cours Ⓑ

Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}}$ équivalente au dipôle AB. On notera ω la pulsation des grandeurs électriques.

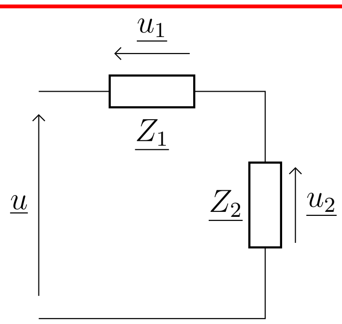
Q1.


Q2.


Q3.


IV.4 Ponts diviseurs en RSF

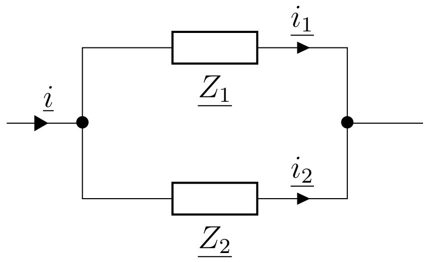
Pont diviseur de tension



La formule du pont diviseur de tension est encore valable avec les impédances complexes, avec la même hypothèse d'un courant identique dans les deux dipôles :

$$\underline{u_1} = \underline{u}\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$

Pont diviseur de courant



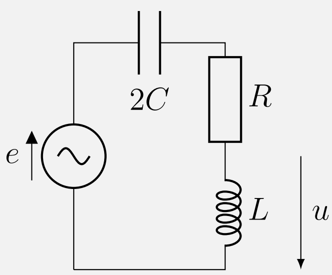
La formule du pont diviseur de courant est encore valable avec les impédances complexes, avec la même hypothèse d'une tension identique aux bornes des deux dipôles :

$$\underline{i_1} = \underline{i}\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$

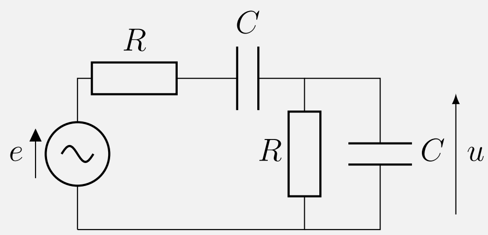
Exercice de cours ©

Établir les expressions, en utilisant la notation complexe, de $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$ et $\underline{i_1}$ en fonction de $\underline{i_0}$ pour les circuits ci-dessous.

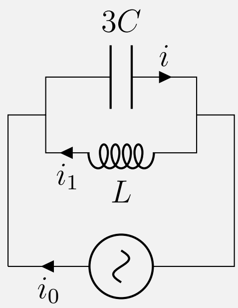
Q1.



Q2.



Q3.



V Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

V.1 Définition

Définition

Résonance : lorsque l'amplitude de la réponse sinusoïdale d'un système à une excitation sinusoïdale, d'amplitude fixe mais de fréquence variable, passe par un maximum pour une valeur f_r de la fréquence, on parle de résonance. f_r est appelée fréquence de résonance.

Remarque

- Il existe deux phénomènes de résonance observables avec un circuit RLC série : la résonance en charge (= résonance en tension aux bornes du condensateur) et la résonance en intensité.

V.2 Résonance en intensité

a) Mise en équation et résolution

Démonstration

On étudie l'intensité, une fois le régime transitoire terminé, dans le circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

Circuit et comportement qualitatif

Q1. Représenter le circuit permettant de visualiser à l'oscilloscope la tension délivrée par le générateur et l'intensité du courant électrique, et positionner les différents courants et tensions afin que le générateur soit en convention générateur et les autres dipôles en convention récepteur.

Q2. Déterminer, à l'aide des comportements asymptotiques des dipôles, la valeur de I_m à basse et haute fréquences.

Amplitude complexe de l'intensité

Le circuit étant alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale et comme tous les composants sont linéaires, tous les signaux (tensions et intensités) sont sinusoïdaux à la pulsation ω du GBF.

Q3. Déterminer, en notation complexe, l'intensité $\underline{i}(t)$, puis son amplitude complexe $\underline{I_m}$.

La mettre sous la forme : $\underline{I_m}(\omega) = \dfrac{A}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ et identifier les trois constantes A, ω_0 et Q.

Q4. Déterminer $\underline{I_m}$ quand $\omega \ll \omega_0$ et quand $\omega \gg \omega_0$. On ne gardera que LE terme dominant au dénominateur.

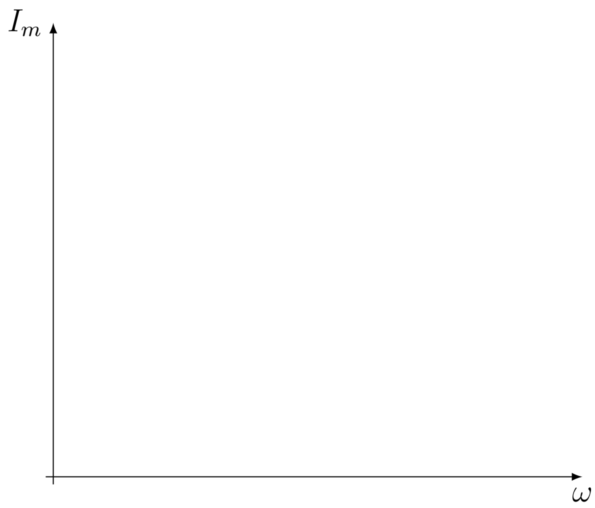
Étude de l'amplitude I_m

Q5. Établir l'expression de $I_m(\omega)$.

Q6. Étudier les limites à basse et haute fréquences.

Q7. Étudier l'existence d'une résonance.

Q8. Tracer l'allure de $I_m(\omega)$.



Q9. Déterminer les expressions des pulsations de coupure en fonction de ω_0 et Q.

Q10. En déduire que la largeur de la bande passante $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ est reliée à Q par : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$. Que dire de la dépendance de l'acuité de la résonance avec le facteur de qualité ?

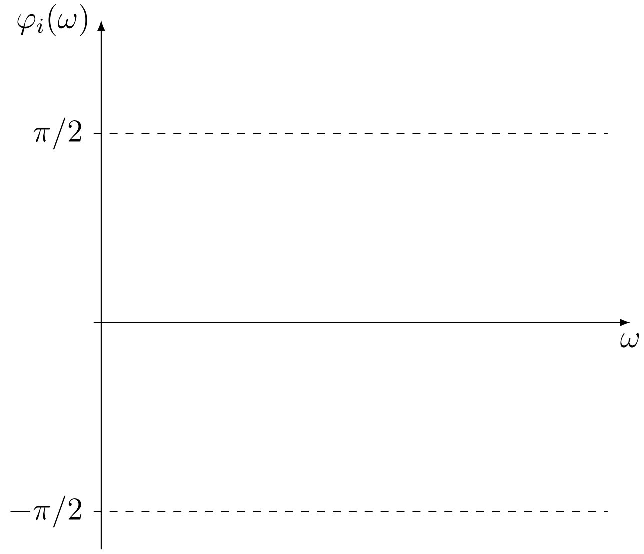
Étude du déphasage φ_i entre i et e

Q11. Exprimer φ_i en fonction de ω, ω_0 et Q.

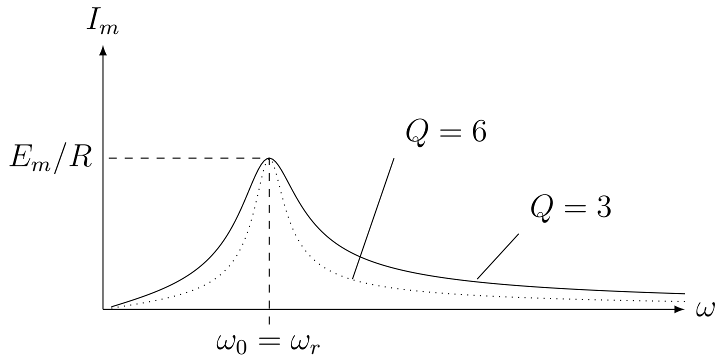
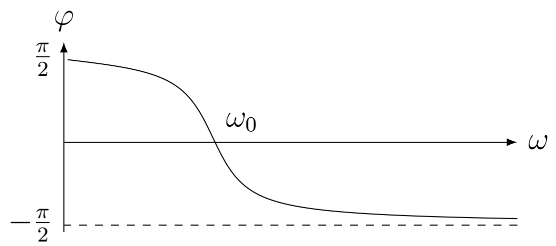
Q12. Déterminer les limites de φ_i quand $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.

Q13. Que vaut le déphasage à la résonance ? Comment sont $e(t)$ et $i(t)$ à la résonance ?

Q14. Tracer l'allure de $\varphi_i(\omega)$.



♥ Résonance en intensité dans un circuit RLC

Excitation	$e(t) = E_m \cos(\omega t)$
Équation différentielle	$L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$\underline{I_m}(\omega) = \dfrac{E_m/R}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Pulsation de résonance [rad/s]	$\omega_r = \omega_0$ **indépendante du facteur de qualité Q**
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ **relié à la bande passante par** $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$ (et $\Delta\omega$ = domaine pour lequel $I_m > \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$)
Graphe de l'amplitude	Amplitude de la réponse 
Graphe de la phase	Déphasage de la réponse par rapport à l'excitation 

b) Utilisation des graphes

☆ Méthode

Méthode : Déterminer graphiquement ω_0 et Q quand sont fournies les courbes d'amplitude I_m et de phase φ en présence d'une résonance du type de la **résonance en intensité** d'un RLC série :

① Lire ω_0 :
- sur la courbe de phase : $\varphi(\omega_0) = 0$;
- ou sur la courbe d'amplitude : ω_0 est la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale

② Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$:
- Lire la valeur maximale de l'amplitude $I_{m,\max} = I_m(\omega_0)$;
- Calculer $\dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$;
- Lire les abscisses ω_{c1} et ω_{c2} pour lesquelles l'amplitude vaut $\dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$;
- En déduire $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$.

③ En déduire le facteur de qualité $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

V.3 Résonance en tension aux bornes de C

a) Mise en équation et résolution

Démonstration

On cherche à déterminer les caractéristiques de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t) = U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_u)$ dans le circuit RLC série alimenté par un générateur de fem $e(t) = E_m\cos(\omega t)$, une fois le régime transitoire terminé.

Circuit et comportement qualitatif

Q1. Représenter le circuit permettant de visualiser à l'oscilloscope la tension délivrée par le générateur et la tension aux bornes du condensateur, et positionner les différents courants et tensions afin que le générateur soit en convention générateur et les autres dipôles en convention récepteur.

Q2. Déterminer, à l'aide des comportements asymptotiques des dipôles, la valeur de U_{Cm} à basse et haute fréquences.

Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

Q3. Établir l'expression de $\underline{u_C}(t)$, puis de $\underline{U_{Cm}}$ en fonction de E_m, ω, L, C, R.
Mettre $\underline{U_{Cm}}$ sous la forme : $\underline{U_{Cm}}(\omega) = \dfrac{E_m}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$, et vérifier que les expressions de ω_0 et Q sont celles définies au chapitre OSC2.

Q4. Exprimer $\underline{U_{Cm}}$ quand $\omega \ll \omega_0$ et $\underline{U_{Cm}}$ quand $\omega \gg \omega_0$. Au dénominateur de $\underline{U_{Cm}}$, on ne gardera que LE terme dominant. En déduire les limites de $\underline{U_{Cm}}$. Commenter physiquement les deux cas limites.

Q5. Exprimer l'amplitude U_{Cm} de la tension aux bornes du condensateur.

Q6. Après avoir posé $X = \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ et introduit la fonction $f(X)$ telle que $f(X) = (1-X)^2 + \dfrac{X}{Q^2}$, compléter les tableaux de variation de $U_{Cm}(\omega)$ sur la page suivante.

Tableaux de variation :

Pour $Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

ω	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(X)$	
$U'_{Cm}(\omega)$	
$U_{Cm}(\omega)$	

Pour $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

ω	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(X)$	
$U'_{Cm}(\omega)$	
$U_{Cm}(\omega)$	

Q7. Tracer l'allure de $U_{Cm}(\omega)$ pour $Q = 0,5$ et $Q = 2$ (avec des couleurs différentes), en faisant apparaître clairement les points particuliers d'abscisses $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_r$.

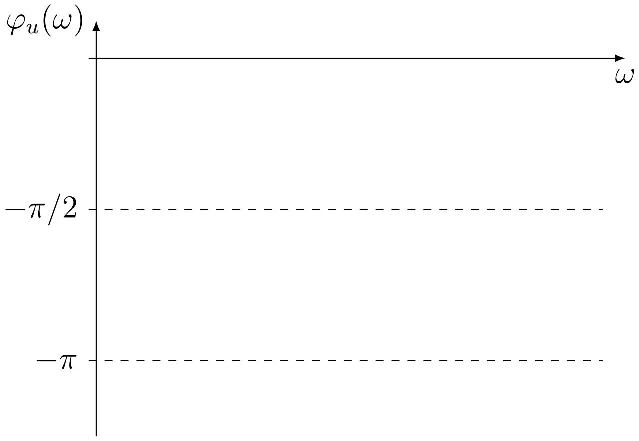
Q8. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur la résonance en tension aux bornes du condensateur ?

Étude du déphasage

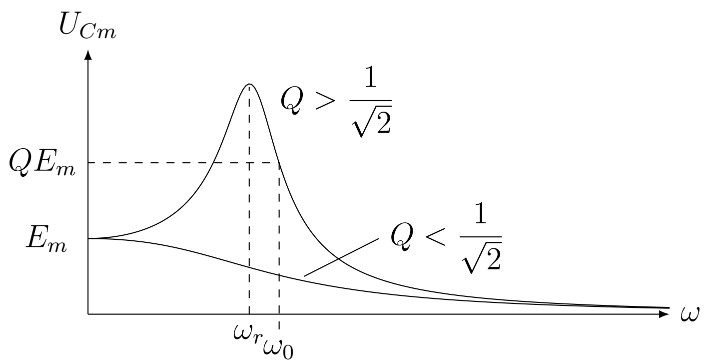
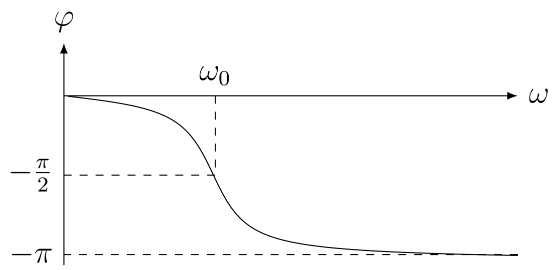
Q9. À partir des limites de $\underline{U_{Cm}}$, déterminer les limites de φ_u, le déphasage de la réponse $U_{Cm}(t)$ par rapport à l'excitation $e(t)$.

Q10. Déterminer la valeur du déphasage en ω_0.

Q11. Montrer que $\varphi_u(\omega) < 0$ puis tracer l'allure de $\varphi_u(\omega)$ pour $Q = 0,5$ et $Q = 2$ (2 couleurs différentes).



♥ Résonance en tension aux bornes du condensateur

Excitation	$e(t) = E_m \cos(\omega t)$
Équation différentielle	$L\dfrac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}u_c = \dfrac{1}{C}e(t)$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$u_c(t) = U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$\underline{U_{Cm}}(\omega) = \dfrac{E_m}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
Pulsation de résonance [rad/s]	**résonance seulement si** $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ **dépend du facteur de qualité** Q
Graphe de l'amplitude	Amplitude de la réponse 
Graphe de la phase	Déphasage de la réponse par rapport à l'excitation 

b) Utilisation des graphes

☆ Méthode

Méthode : Déterminer graphiquement ω_0 et Q quand sont fournies les courbes d'amplitude U_{Cm} et de phase φ en présence d'une résonance du type de la **résonance en tension aux bornes du condensateur** d'un RLC série :

① Lire ω_0 sur la courbe de phase : $\varphi(\omega_0) = -\dfrac{\pi}{2}$;

② 2 méthodes pour déterminer Q :

- Lire la pulsation ω_r de résonance sur la courbe d'amplitude U_{Cm} : ω_r est la pulsation à laquelle U_{Cm} est maximale, puis en déduire le facteur de qualité Q grâce à la relation : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$
- ou sur la courbe d'amplitude U_{Cm}, lire l'amplitude $U_{Cm}(\omega_0)$ en ω_0 et l'amplitude $U_{Cm}(0)$ en $\omega = 0$. Utiliser ensuite la relation $U_{Cm}(\omega_0) = Q \times U_{Cm}(0)$ pour en déduire Q.

② Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$:

- Lire la valeur maximale de l'amplitude $U_{Cm\,\max} = U_{Cm}(\omega_r)$;
- Calculer $\dfrac{U_{Cm\,\max}}{\sqrt{2}}$;
- Lire les abscisses ω_{c1} et ω_{c2} pour lesquelles l'amplitude vaut $\dfrac{U_{Cm\,\max}}{\sqrt{2}}$;
- En déduire $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$.