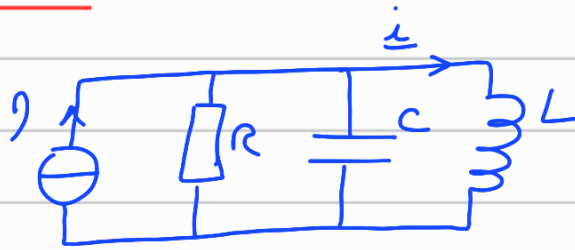


Correction TD OSC3

Exercice 5 :

Q1.



On fait un pont diviseur de courant :

$$\underline{i} = \underline{I} \frac{\underline{Y}_L}{\underline{Y}_L + \underline{Y}_C + \underline{Y}_R}$$

$$\underline{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j\omega t} \frac{1/jL\omega}{1/jL\omega + jC\omega + 1/R}$$

$$\underline{I}_m = I_m \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega}$$

$$Q2. A(\omega) = \frac{I_m}{I_m} = \frac{|I_m|}{I_m}$$

$$\text{Soit } A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}}$$

Q3. Comme dans le cours on pose $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L}$$

$$\text{Soit } Q = \frac{R}{L} \times \sqrt{LC} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{Ce qui donne :}$$

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}}} = \left[(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2} \right]^{-1/2}$$

$$A'(x) = -\frac{1}{2} \left[2(-1)(1-x) + \frac{1}{Q^2} \right] \times \underbrace{\left[(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2} \right]^{-3/2}}_{\text{toujours } > 0}$$

$A'(x)$ est du signe de $2(1-x) - \frac{1}{Q^2}$

$$* A'(x_m) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x_m - \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$x_m = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cet extrémum existe si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2Q^2} < 1 \Leftrightarrow Q^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{R > \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$* \text{ si } Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{Q^2} < -2$$

$$\text{et } 2(1-x) < 2$$

$$\Rightarrow 2(1-x) - \frac{1}{Q^2} < 0$$

donc $A'(x) < 0$ pour tout x

$A(\omega)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$

* Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il y a un extremum en $X_m = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

$$A'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(1-x) - \frac{1}{Q^2} < 0$$

$$2(1-x) < \frac{1}{Q^2}$$

$$1-x < \frac{1}{2Q^2}$$

$$-x < \frac{1}{2Q^2} - 1$$

$$x > 1 - \frac{1}{2Q^2} = X_m$$

et $A'(x) > 0$ pour $x < X_m$

$A(x)$ est croissante sur l'intervalle $[0, X_m]$

et décroissante sur l'intervalle $[X_m, +\infty[$

$$X_m = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad \text{avec} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\text{et} \quad X_m = \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 = \omega_r^2 \cdot LC$$

$$\text{D'où} \quad \omega_r^2 \cdot LC = 1 - \frac{L}{2R^2C}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{2R^2C}}$$

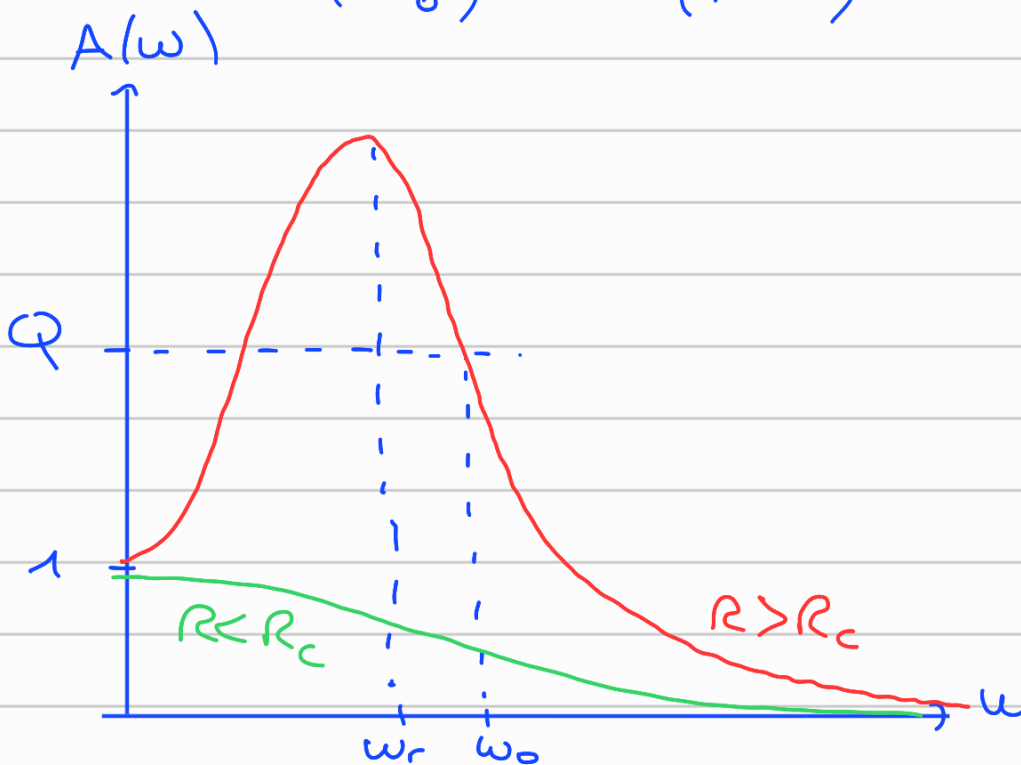
ω_r existe si et seulement si $\frac{L}{2R^2C} < 1$

$$\frac{2R^2C}{L} > 1 \quad R^2 > \frac{L}{2C}$$

$$R > \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q4. $A(0) = 1$

$$A(\omega_0) = A(x=1) = Q$$



Exercice 7 :

$$Q1. \quad \underline{Y_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega} = \frac{jC\omega(R+jL\omega) + 1}{R+jL\omega}$$

$$\underline{Y_{eq}} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R+jL\omega}$$

$$\underline{Z_{eq}} = \frac{R+jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$Q2. \quad \underline{Z_{eq}} = \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{\frac{1}{R} - \frac{L}{R}C\omega^2 + jC\omega}$$

$$\text{or } \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{R} - \frac{LC\omega^2}{R} + jC\omega}$$

$$\text{or } LC = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{R}jRC\omega}$$

$$\text{avec } RC = \frac{L\omega_0}{Q} \times \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{Q\omega_0}$$

$$\Rightarrow \underline{Z_{eq}} = R \frac{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\text{Soit } \underline{Z_{eq}} = R \frac{1 + jQx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

$$Q3. |Z_{eq}| = R \frac{\sqrt{1+Q^2 x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$\text{On pose } u = x^2 : |Z_{eq}| = R \sqrt{\frac{1+Q^2 u}{(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}}}$$

$$\text{On pose } f(u) = \frac{1+Q^2 u}{(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}}$$

$$|Z_{eq}| = R f^{1/2}(u)$$

$$\text{donc } |Z_{eq}|' = \frac{1}{2} R f'(u) \underbrace{f^{-1/2}(u)}_{>0}$$

donc $|Z_{eq}'|$ est du signe de $f'(u)$

$$f'(u) = \frac{Q^2((1-u)^2 + u/Q^2) - (1+Q^2 u)(-2(1-u) + 1/Q^2)}{\left[(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}\right]^2}$$

$f'(u)$ s'annule pour

$$Q^2(1-u)^2 + u + (1+Q^2 u)(2(1-u) - \frac{1}{Q^2}) = 0$$

$$Q^2 + Q^2 u^2 - 2Q^2 u + u + (1+Q^2 u)(2 - 2u - \frac{1}{Q^2}) = 0$$

$$Q^2 + Q^2 u^2 - \cancel{2Q^2 u} + \cancel{u} + 2 - 2u - \frac{1}{Q^2} + \cancel{2Q^2 u} - \cancel{2Q^2 u^2} - \cancel{u} = 0$$

$$Q^2 - Q^2 u^2 + 2 - 2u - \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$Q^4 - Q^4 u^2 + 2Q^2 - 2Q^2 u - 1 = 0$$

$$Q^4 u^2 + 2Q^2 u + 1 - 2Q^2 - Q^4 = 0$$

$$\Delta = 4Q^4 - 4Q^4(1 - 2Q^2 - Q^4) = 4Q^4(2Q^2 + Q^4)$$

$$u = \frac{-2Q^2 + 2Q^2\sqrt{Q^4 + 2Q^2}}{2Q^4} \quad (u > 0)$$

$$u = \frac{\sqrt{Q^4 + 2Q^2} - 1}{Q^2}$$

Cette solution est valable si $\sqrt{Q^4 + 2Q^2} > 1$

$$\Leftrightarrow Q^4 + 2Q^2 - 1 > 0$$

$$\text{On pose } Q^2 = X : X^2 + 2X - 1 > 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

Ce polynôme est positif à l'extérieur des racines, soit pour $X > \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1$

$$\Rightarrow \text{Il y a un extrémum si } \underline{Q^2 > \sqrt{2} - 1}$$

$$Q4. \quad u = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = \frac{\sqrt{Q^4 + 2Q^2} - 1}{Q^2}$$

$$\boxed{\omega_r = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{\sqrt{Q^4 + 2Q^2} - 1}}$$

$$Q5 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |Z_{eq}| = R \quad (\alpha \text{ tend aussi vers } 0)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |Z_{eq}| = 0 \quad (\alpha \text{ tend aussi vers } +\infty)$$

$|Z_{eq}|$ étant positive, avec 1 seul extrémum $\Rightarrow$ il s'agit d'un maximum.

* Si $Q < \sqrt{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow |Z_{eq}|$ décroît de façon monotone sur l'intervalle $[0; +\infty[$

* Si $Q > \sqrt{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow |Z_{eq}|$ passe par un maximum pour $\omega = \omega_r$, puis décroît jusqu'à 0.

$$Q6. \quad \text{On a } \underline{e} = \underline{Z_{eq}} \underline{i} \text{ donc } E = |Z_{eq}| I$$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{|Z_{eq}|} \quad \text{donc les variations}$$

d'intensité sont opposées aux variations de $|Z_{eq}| \Rightarrow$ phénomène d'antirésonance pour l'intensité.

$$Q7. \lim_{Q \rightarrow +\infty} \omega_r = \omega_0$$

$$\text{On a alors } \frac{\omega_r}{\omega_0} = 1 \text{ soit } x = 1$$

$$\text{et } |\underline{z}_q| = R \frac{\sqrt{1+Q^2 x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = R \frac{\sqrt{1+Q^2}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}}$$

$$|\underline{z}_q| \approx R \sqrt{Q^2 + Q^4} \approx R Q^2.$$

Exercice 8 :

Q1. On étudie le système {moteur} assimilé à un point matériel de masse m , dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

* force de rappel élastique: $\vec{f}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$

* force de frottement fluide: $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\vec{u}_z$

* force supplémentaire modélisant le fonctionnement du moteur : $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$

A l'équilibre (moteur éteint) $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{F} = \vec{0}$.

Le principe d'inertie projeté sur (Oz) donne :

$$-mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

Q2. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \int \vec{d} + \vec{f} + \vec{F}$$

$$m\ddot{z}\vec{u}_z = -mg\vec{u}_z - k(l(t) - l_0)\vec{u}_z - \alpha\dot{z}\vec{u}_z + F_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$$

$$\text{soit } m\ddot{z} = -mg - k(l(t) - l_0) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)$$

$$\text{or } l(t) = l_{eq} + z = l_0 - \frac{mg}{k} + z \Rightarrow l(t) - l_0 = z - \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -\cancel{mg} - kz + \cancel{mg} - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -kz(t) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)$$

D'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

Q3. On pose $v(t) = V_0\cos(\omega t + \phi)$

soit $\underline{u}(t) = \underline{V} e^{j\omega t}$ avec $\underline{V} = V_0 e^{j\phi}$

On a donc $\underline{\ddot{z}} = j\omega \underline{u}$

et $\underline{z} = \frac{1}{j\omega} \underline{u}$

l'équation différentielle en complexe est :

$$\underline{\ddot{z}} + \frac{d}{m} \underline{\dot{z}} + \frac{k}{m} \underline{z} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$j\omega \underline{u} + \frac{d}{m} \underline{u} + \frac{k}{j\omega m} \underline{u} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$\left(j\omega + \frac{d}{m} + \frac{k}{j\omega m} \right) \underline{V} = \frac{F_0}{m}$$

$$\text{D'où } \underline{V} = \frac{F_0/m}{j\omega + \frac{d}{m} - j \frac{k}{\omega m}}$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{d}{m} = 2\lambda$

$$\underline{V} = \frac{F_0/m}{2\lambda + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{V} = \frac{F_0/m}{2\lambda + j\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$Q5 \quad V_0(\omega) = |\underline{V}| = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\lambda^2 + \omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Cette expression est de la forme de l'intensité dans le RLC série.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} V_0 = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} V_0 = 0$$

et V_0 est maximale pour $\omega = \omega_0$

(dénominateur minimal)

Q6. Avec les valeurs proposées on détermine les pulsations propres :

$$* \quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 632 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \text{proche de } \omega$$

l'amplitude des vibrations sera donc importante.

$$* \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 316 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \text{plus éloigné}$$

de ω donc ce choix paraît plus pertinent.

(Pour une étude complète il faudrait étudier la largeur de la bande passante, ce qui nécessite de connaître α).