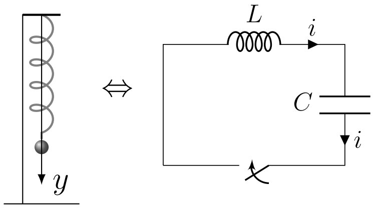
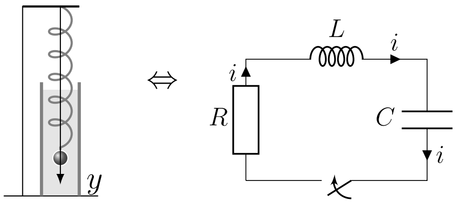
OSC2 : Étude de l'oscillateur amorti



Après avoir montré que le circuit LC donne lieu à des oscillations électriques de la même façon qu'un système masse-ressort sans frottements peut osciller indéfiniment en mécanique, nous allons nous intéresser au cas réel où les oscillations subissent un amortissement.



En mécanique ce sont les frottements qui sont responsables de l'amortissement des oscillations, en électricité il est dû au caractère résistif du circuit. On adopte dans ce chapitre le modèle du frottement fluide en introduisant une force de frottement qui s'oppose toujours au déplacement et dont l'intensité est proportionnelle à la vitesse : $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$ avec $\alpha > 0$ constant.

Plan du cours

À savoir par ♥

✓ Connaissances sur l'oscillateur harmonique.

À savoir faire

✓ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
✓ Déterminer le régime permanent sans calculs.
✓ Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité.
✓ Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.
✓ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.
✓ Effectuer un bilan de puissance ou d'énergie.

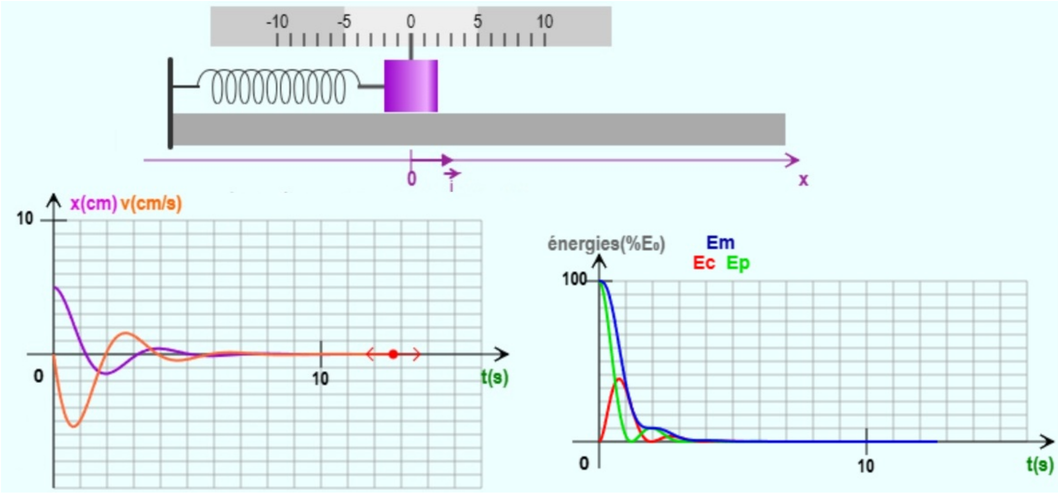
I Observations expérimentales

I.1 Oscillateur mécanique

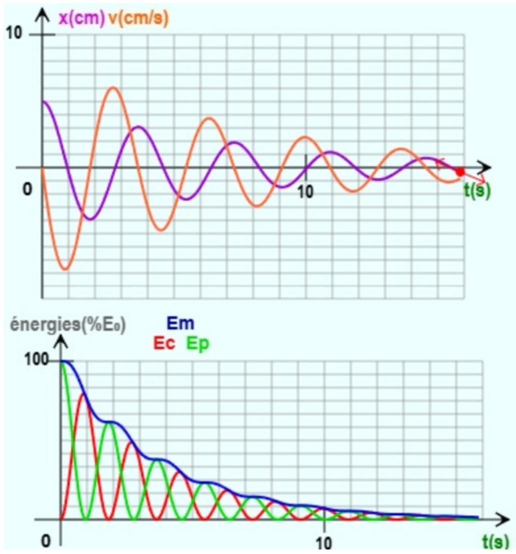
Simulation : influence des frottements

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/Oscillat3_FJ.phphttps://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

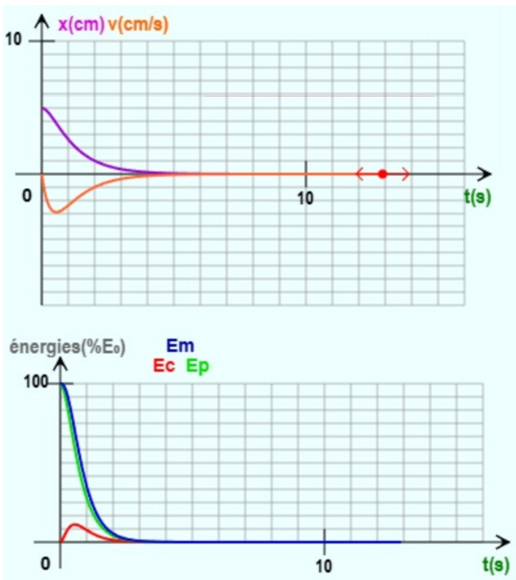
— Évolution de $x(t)$ avec $x_0 = 5\,\mathrm{cm}$, $v_0 = 0\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$, $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, $k = 1{,}5\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, $h = 0{,}6\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$



— Effet d'une diminution des frottements ($h = 0{,}1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$) :



— Effet d'une augmentation des frottements ($h = 2\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$) :



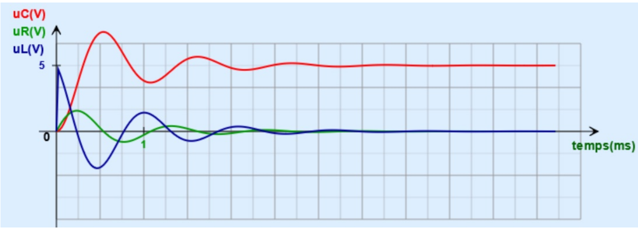
— Que peut-on dire de l'état final dans les 3 cas ? Quel paramètre détermine le type de régime transitoire (oscillant ou non) ?

I.2 Oscillateur électrique

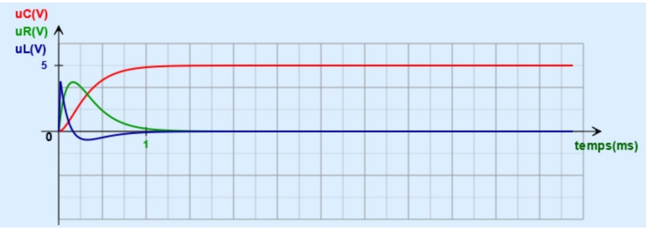
Simulation : influence de la résistance

`https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/Condensateur1.php`
on fait varier la valeur de R, les valeurs de L et C étant fixes ($L = 0{,}40\,\mathrm{H}$ et $C = 80{,}5\,\mathrm{nF}$).

— Réponse indicielle :



$C = 80{,}5\,\mathrm{nF},\ L = 0{,}40\,\mathrm{H},\ R = 1\,\mathrm{k\Omega}$



$C = 80{,}5\,\mathrm{nF},\ L = 0{,}70\,\mathrm{H},\ R = 5\,\mathrm{k\Omega}$

L'état final est-il modifié lorsque R varie ? Quelle différence observe-t-on sur les signaux lorsque R prend les valeurs extrêmes proposées ($R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$).

— Mêmes questions en régime libre (condensateur chargé à l'état initial).

Simulation : aspects énergétiques

`https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/NRJ_FJ.php`

Comment évoluent les énergies E_e (énergie électrique dans le condensateur), E_{mag} (énergie magnétique dans la bobine), et E_{em} (énergie électromagnétique totale) lorsque la résistance du circuit est faible ?

Même question lorsque la résistance du circuit est élevée.

I.3 Analogies mécanique-électrique

Les résultats précédent permettent d'établir des analogies entre les oscillateurs amortis mécanique et électrique :

Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
E_m	
E_p	
E_c	
frottement	
masse qui oscille	
position $x(t)$	
vitesse $v(t)$	

II Mise en équation

II.1 État final

Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du système, une fois le régime transitoire terminé :

— la position d'équilibre de la masse pour l'oscillateur mécanique → voir OSC1, avec la force de frottement fluide $f = -\alpha \vec{v} = \vec{0}$ à l'équilibre.

— les tensions et intensités pour $t \to \infty$ dans le circuit pour l'oscillateur électrique → on utilise les équivalents des dipôles en régime permanent (rappel EL1), méthode ci-dessous.

☆ Méthode

❶ Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau régime permanent atteint en remplaçant chaque condensateur par un interrupteur ouvert et chaque bobine par un fil.

❷ En déduire que les tensions aux bornes des bobines et les intensités à travers les condensateurs sont nulles : $u_L(\infty) = 0$ et $i_C(\infty) = 0$.

❸ Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

Démonstration

Déterminer les grandeurs électriques à la fin du régime transitoire lors de la réponse à un échelon de tension du RLC série en suivant la méthode ci-dessus.

II.2 Forme canonique de l'équation différentielle

Formule

Forme canonique de l'équation différentielle pour un oscillateur amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

avec :
- $\omega_0 =$ pulsation propre en rad·s^{-1}
- $Q =$ facteur de qualité (grandeur sans dimension)
- $s(\infty) =$ valeur de s une fois le régime permanent atteint

II.3 Mise en équation de l'oscillateur mécanique amorti par frottement fluide

Méthode

❶ Définir le **système** (= l'objet dont on étudie le mouvement).

❷ Préciser le **référentiel d'étude** $\mathcal{R}_g$, supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.

❸ Choisir le **système de coordonnées adapté** à la description du mouvement.

❹ Faire un **grand schéma clair** sur lequel vous représentez le système et la base choisie.

❺ Définir les notations nécessaires associées aux grandeurs dont seules les valeurs sont fournies (par exemple : m pour la masse, v_0 pour la vitesse initiale, etc).

❻ Faire un **bilan des actions mécaniques** précis et complet : les nommer et en donner leurs expressions. **Représenter toutes les forces** sur le schéma.

❼ Écrire « On applique le Principe Fondamental de la Dynamique au système dans le référentiel ...... galiléen ».

❽ **Projeter l'équation vectorielle** dans la base associée au système de coordonnées choisi pour repérer la position du système.

❾ Mettre l'équation différentielle sous forme canonique, c'est à dire avec un coefficient 1 devant le terme de la dérivée d'ordre 2 (voir formule dans la partie II.2).

❿ Déterminer les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction des caractéristiques de l'oscillateur (k, m et α).

Application directe

Appliquer la méthode ci-dessus pour établir l'équation différentielle vérifiée par la position d'une masse m accrochée à l'extrémité droite d'un ressort horizontale (fixé au mur à son extrémité gauche). La force de frottement fluide est sonnée par $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec $\alpha =$ coefficient de frottement fluide.

II.4 Mise en équation du circuit RLC série

☆ Méthode

Pour établir l'équation différentielle vérifiée par une grandeur électrique s (u_c, i, q) d'un circuit RLC soumis à un échelon de tension ou en régime libre :

❶ Représenter le circuit électrique étudié, en nommant et fléchant SUR le circuit toutes les tensions et intensités.

❷ Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont du être représentées sur le circuit précédemment). Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.

❸ Écrire toutes les relations indépendantes possibles :

— lois des mailles indépendantes

— lois des nœuds

— relations intensité-tension pour tous les dipôles

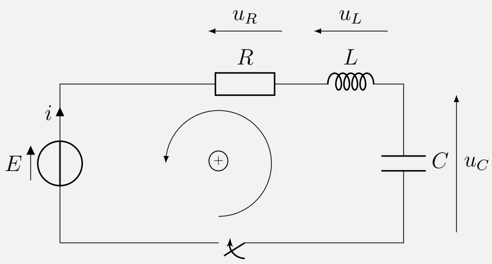
❹ Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur qui nous intéresse.

❺ Mettre l'équation différentielle sous forme canonique, c'est à dire avec un coefficient 1 devant le terme de la dérivée d'ordre 2 (voir formule dans la partie II.2).

❻ Déterminer les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction des résistances, inductances et capacités présentes dans le circuit.

Application directe

Appliquer la méthode ci-dessus pour établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ pour le circuit RLC série soumis à un échelon de tension E. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.



Application directe

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur $q(t)$ pour le circuit RLC série soumis à un échelon de tension E. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

Application directe

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ traversant le circuit RLC série soumis à un échelon de tension E. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

Remarques

- ω_0 et Q ne dépendent pas de la grandeur étudiée (u_C, u_L, i, q), ils dépendent des valeurs des composants du circuit : R, L, C.
- Les calculs strictement identiques dans le cas de la réponse en regime libre (en enlevant E). On obtient des équations différentielles strictement identiques, mais sans second membre.

III Résolution de l'équation différentielle

III.1 Méthode de résolution

Méthode

Pour résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$ **, il faut :**

❶ **Résoudre l'équation homogène (sans second membre)** : $\dfrac{\mathrm{d}^2 s_H}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s_H}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s_H = 0$ (EH)

a) Écrire l'équation caractéristique (EC) : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

b) Calculer le discriminant de (EC) : $\Delta = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q^2} - 1\right)$

c) Déterminer le signe de Δ grâce aux valeurs numériques fournies.

d) En déduire les racines r de l'équation caractéristique (EC) :

- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{2}$: 2 racines complexes conjuguées : $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$
- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}$: 2 racines réelles : $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{1}{2}$: 1 racine double : $r = -\omega_0$

e) En déduire les solutions générales $s_H(t)$ de l'équation homogène (EH), en introduisant deux constantes d'intégration A et B :

- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{2}$: $s_H(t) = e^{\mathrm{Re}(r)t}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = |\mathrm{Im}(r)|$
- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}$: $s_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{1}{2}$: $s_H(t) = (At + B)e^{rt}$

❷ **Déterminer la solution particulière s_P recherchée sous la même forme que le second membre**, c'est-à-dire sous la forme d'une constante dans ce chapitre : $s_P = s_\infty$

❸ La solution générale recherchée est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$s(t) = s_H(t) + s_P$$

❹ Déterminer les **constantes d'intégration** A et B à l'aide des conditions initiales : $s(0)$ et sa dérivée première $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0)$.

III.2 Conditions initiales

On a obtenu une équation différentielle du 2ᵉ ordre vérifiée par s (position pour l'oscillateur mécanique, tension, intensité, charge pour l'oscillateur électrique), dont la résolution fait intervenir 2 constantes d'intégration, que l'on détermine avec les deux conditions initiales $s(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Dans le cas de l'oscillateur mécanique, les conditions initiales sont généralement explicitées dans l'énoncé de la situation.

☆ Méthode

Pour déterminer les conditions initiales du circuit RLC série :

❶ Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.

❷ Utiliser la continuité de la charge du condensateur (ou de la tension aux bornes du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).

❸ Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$. On en déduit les valeurs de $s(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Application directe

Appliquer la méthode précédente pour déterminer les valeurs des grandeurs électriques u_C, q, i et u_L et leurs dérivées premières à $t = 0^+$ lors de la réponse à un échelon de tension.

III.3 Cas $Q > \frac{1}{2}$ Régime pseudo-périodique

On s'intéresse à la grandeur u_C dans le circuit RLC série, dont on a montré qu'elle vérifie l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Exercice de cours Ⓐ

Q1. Calculer la valeur de ω_0 et Q dans la 1re simulation au I.2 (C =80,5 nF, L =0,40 H, R =1 kΩ) et vérifier qu'on avait bien $Q > \frac{1}{2}$.

Q2. En suivant scrupuleusement la méthode donnée au III.1 , déterminer la solution générale $u_C(t)$ et la mettre sous la forme $u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) + E$. Identifier les expressions de τ et Ω en fonction de Q et ω_0. Quelles sont les dimensions de ces deux grandeurs ? À quoi correspondent-elles ? Faire les AN pour déterminer leurs valeurs.

Q3. Déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales déterminées au III.2.

Q4. Tracer l'allure de $u_C(t)$ avec votre calculatrice, décrire l'évolution de la courbe obtenue et vérifier la cohérence avec la simulation du I.2 .

Remarque

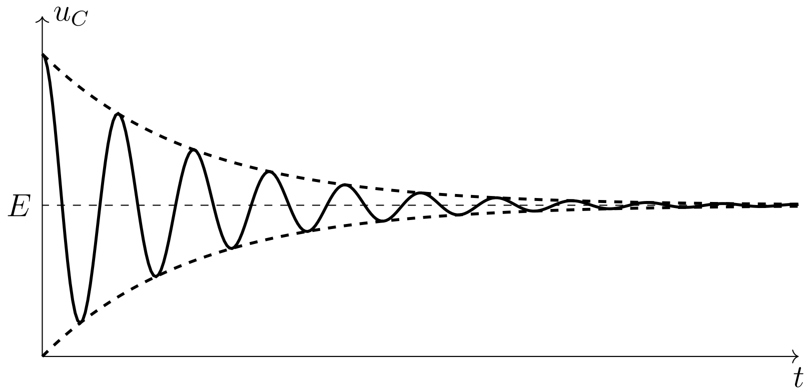
Avec la formule trigo : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, on peut mettre u_C sous la forme :

$$u_C(t) = E + Ke^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi)$$

Propriétés du régime pseudo-périodique $Q > \dfrac{1}{2}$

$$u_C(t) = E + Ke^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi)$$

donc $u_C(t) - E$ est le produit d'une fonction sinusoïdale de pulsation Ω et d'une fonction exponentielle décroissante $e^{-\frac{t}{\tau}}$, qui décroit sur une durée caractéristique τ.
$\Rightarrow$ La tension u_C oscille avant de se stabiliser à sa valeur imposée par le générateur :



— La période des oscillations, appelée pseudo-période, vaut $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.

On a la relation $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}} > T_0$.

— L'amortissement des oscillations est caractérisée par la constante de temps $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$.

Durée caractéristique du régime transitoire pseudo-périodique : quelques $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$
$\Rightarrow$ il est d'autant plus long que le facteur de qualité Q est élevé (et donc que la valeur de la résistance R est faible à L et C fixés)

Définition

Décrément logarithmique δ : il mesure la diminution de l'amplitude des oscillations pendant une période, caractérisant ainsi leur amortissement :

$$\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right)$$

avec A = amplitude des oscillations
T = pseudo-période des oscillations

Application directe

Déterminer l'expression du décrément logarithmique en fonction de Q.

Systèmes peu amortis $Q \gg 1$

Pour $Q \gg 1$, la pseudo-période vaut $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} \approx \dfrac{2\pi}{\omega_0} = T_0$.

$\Rightarrow$ Pour $Q \gg 1$, la pseudo-pulsation est quasiment égale à la pulsation propre : $\Omega \approx \omega_0$
(et la pseudo-période est quasiment égale à la période propre : $T \approx T_0$).

Nombre d'oscillations pendant le régime transitoire $N = \dfrac{\text{durée du régime transitoire}}{\text{durée d'1 oscillation}}$

avec : durée du régime transitoire = quelques τ ($\approx 4\tau$) et durée d'une oscillation = T

$$N \approx \frac{4\tau}{T} \approx \frac{4\times 2Q}{\omega_0}\times\frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1,3Q$$

Un système peu amorti effectue environ Q oscillations durant le régime transitoire.

$\rightarrow$ **En régime pseudo-périodique peu amorti, le facteur de qualité Q donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations avant l'établissement du régime permanent.**

Application directe

Déterminer le nombre d'oscillations observées pendant le régime pseudo-périodique de la 1re simulation au I.2 et vérifier avec le critère donné ci-dessus.

III.4 Cas $Q < \frac{1}{2}$ Régime apériodique

Exercice de cours Ⓑ

Q1. Calculer la valeur de ω_0 et Q dans la 2e simulation (C =80,5 nF, L =0,40 H, R =5 kΩ) et vérifier qu'on avait bien $Q < \frac{1}{2}$.

Q2. En suivant scrupuleusement la méthode donnée au III.1 , déterminer numériquement r_1 et r_2 puis déterminer l'expression numérique de la solution générale $u_C(t)$.

Q3. Déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales déterminées au III.2.

Q4. Tracer l'allure de $u_C(t)$ avec votre calculatrice, décrire l'évolution de la courbe obtenue et vérifier la cohérence avec la simulation du I.2 .

Remarque

Les 2 racines r_1 et r_2 sont négatives (sinon on aurait divergence en $+\infty$).

Propriétés du régime apériodique $Q < \dfrac{1}{2}$

$$u_C(t) = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

donc $u_C - E$ est la somme de deux exponentielles décroissantes (r_1 et r_2 étant négatives), que l'on peut mettre sous la forme : $u_C(t) - E = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$ en posant τ_1 et τ_2 les temps caractéristiques de décroissance des deux exponentielles, tels que : $r_1 = -\dfrac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}$.

Pour $r_1 < r_2$, on a donc $\tau_1 < \tau_2$, l'exponentielle e^{-t/τ_1} décroît donc plus rapidement que e^{-t/τ_2}. L'exponentielle qui impose la fin du régime transitoire est donc e^{-t/τ_2} car elle décroît moins rapidement.

Pour déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire apériodique, il faut donc estimer un ordre de grandeur de τ_2.

♥ Systèmes très amortis $Q \ll 1$

Déterminons l'expression de τ_2 en fonction de ω_0 et Q :

$$\tau_2 = -\frac{1}{r_2} = -\frac{1}{-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1-4Q^2}\right)}$$

Pour $x \ll 1$, on peut faire un développement limité : $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$.

On obtient : $\tau_2 = \dfrac{1}{\omega_0 Q}$

Durée caractéristique du régime transitoire apériodique : quelques $\tau_2 = \dfrac{1}{Q\omega_0}$

$\Rightarrow$ il est d'autant plus court que le facteur de qualité augmente (tout en restant inférieur à 1/2), c'est-à-dire lorsque la valeur de R diminue à C et L constants.

L'influence du facteur de qualité sur la durée du régime transitoire apériodique ($\tau \propto 1/Q$) est inverse de celle sur la durée du régime transitoire pseudo-périodique ($\tau \propto Q$).

III.5 Cas $Q = \frac{1}{2}$ Régime critique

Exercice de cours ©

Q1. Déterminer la valeur de R à choisir pour avoir un facteur de qualité égal à $\frac{1}{2}$ avec les conditions de la simulation : $L = 0{,}4\,\mathrm{H}$ et $C = 80{,}5\,\mathrm{nF}$.

Q2. Déterminer la valeur de la racine double r de l'équation caractéristique.

Q3. Déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales déterminées au III.2.

Q4. Tracer l'allure de $u_C(t)$ avec votre calculatrice, comparer avec la courbe obtenue dans le cas du régime apériodique.

♥ Propriétés du régime critique $Q = \dfrac{1}{2}$

$$u_C(t) = E + (At + B)e^{rt}$$

avec $r = -\dfrac{\omega_0}{2 \times \dfrac{1}{2}} = -\omega_0$ donc u_C est une fonction faisant intervenir une exponentielle décroissante, qui décroit donc avec un temps caractéristique de durée de $1/\omega_0$.

Durée caractéristique du régime transitoire en régime critique : quelques $\tau = 1/\omega_0$

III.6 Aspects énergétiques de la réponse indicielle du circuit RLC série

Rappel du chapitre EL2 : Pour établir le bilan de puissance il faut multiplier la loi des mailles par l'intensité i : $E \times i = u_c \times i + u_R \times i + u_L \times i$, avec

- la puissance algébriquement fournie par le générateur $E \times i$;
- la puissance algébriquement reçue par le condensateur : $u_c \times i = u_c \times C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_c^2\right)$, où $\dfrac{1}{2}Cu_c^2$ est l'énergie stockée par le condensateur ;
- la puissance algébriquement reçue par la bobine : $u_L \times i = i \times L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$, où $\dfrac{1}{2}Li^2$ est l'énergie stockée par la bobine ;
- la puissance algébriquement reçue par la résistance : $Ri^2 > 0$, donc réellement reçue à tout instant, elle est entièrement dissipée sous forme d'énergie thermique.

IV En résumé

Synthèse

Équation différentielle d'un oscillateur amorti :

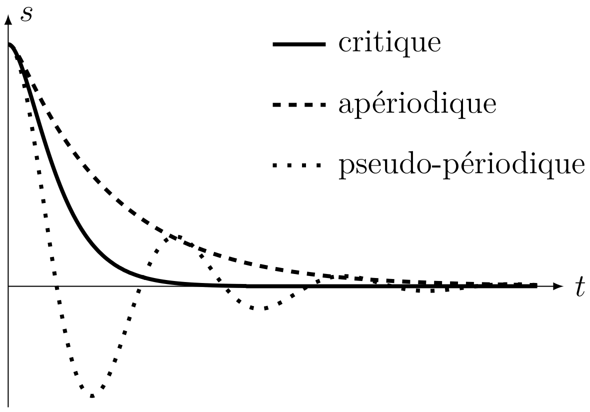
$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

$$\begin{array}{rcl} s & = & \text{grandeur électrique} \\ \omega_0 & = & \text{pulsation propre en rad/s)} \\ Q & = & \text{facteur de qualité (sans unité)} \\ s(\infty) & = & \text{valeur finale atteinte par } s \text{ à la fin du régime transitoire (après quelques } \tau) \end{array}$$

ω_0 et Q : constantes positives qui dépendent des paramètres de l'oscillateur

	pulsation propre ω_0	facteur de qualité Q
Oscillateur électrique	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
Oscillateur mécanique	$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\dfrac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Différents régimes transitoires :



Régime	Δ	Q	τ
apériodique	$\Delta > 0$	$Q < \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\omega_0 Q}$
critique	$\Delta = 0$	$Q = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\omega_0}$
pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2Q}{\omega_0}$

Durée du régime transitoire :

- La durée du régime transitoire apériodique diminue lorsque Q augmente.
- C'est dans le cas du régime critique que le régime permanent est atteint le plus rapidement (et sans oscillation), à ω_0 fixé.
- La durée d'un régime transitoire pseudo-périodique augmente lorsque Q augmente, et Q donne approx. le nombre d'oscillations du système avant d'atteindre le régime permanent.

$Q < \dfrac{1}{2}$	$Q = \dfrac{1}{2}$	$Q > \dfrac{1}{2}$	Q
$\tau = \dfrac{1}{\omega_0 Q}$ $\quad \tau \searrow$	$\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$	$\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ $\quad \tau \nearrow$	

Cas des systèmes faiblement amortis : $Q \gg \dfrac{1}{2}$:

— Q très élevé : nombreuses oscillations et durée du régime transitoire très élevée

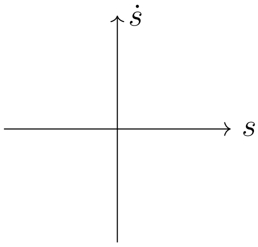
— Ω (pseudo-pulsation) est très proche de ω_0 (pulsation propre)

V Portrait de phase

V.1 Définition et propriétés

Méthode

Portrait de phase : Pour un système dont l'évolution au cours du temps t est décrit par la fonction $s(t)$, on appelle portrait de phase la représentation de $\dot{s}$ en fonction de s.
Un portrait de phase est donc une courbe qui montre les positions au cours du temps t d'un point représentatif M d'abscisse s et d'ordonnée $\dot{s}$ dans un repère cartésien.



Propriétés

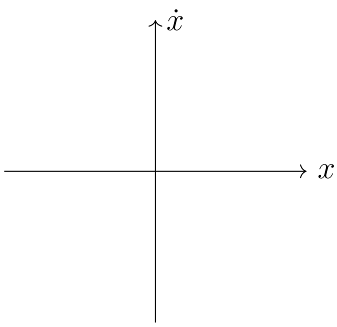
- Sur un portrait de phase la courbe est paramétrée par t, on l'oriente donc selon t croissant.
- Le demi-plan supérieur ($\dot{s} > 0$) correspond à s croissant (et le demi-plan inférieur correspond à s décroissant) donc les courbes sont nécessairement parcourues dans le **sens horaire**.
- Pour un point situé sur l'axe des abscisses, $\dot{s} = 0$ donc s est constant ou extrémal (= point de rebroussement).

V.2 Application aux oscillateurs amortis

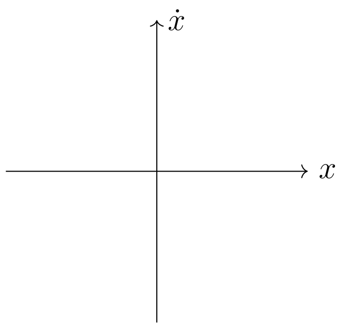
Simulation : portraits de phase de l'oscillateur mécanique

Observer et représenter qualitativement les portraits de phases dans le cas des différents régimes et avec différentes conditions initiales avec la simulation : `https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort.php?typanim=Javascript`

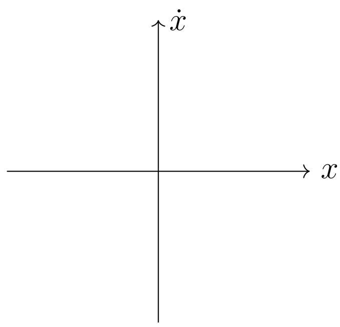
(où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\alpha}{2m}$, en ordonnée est portée $\frac{v}{\omega_0}$)



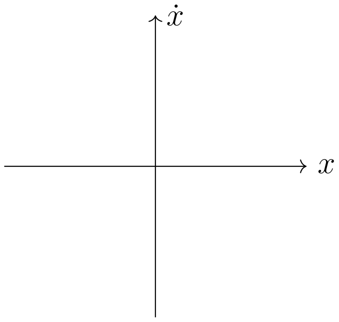
$Q = 5$
($x_0 = 100\,\mathrm{mm}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\lambda = 0{,}2\,\mathrm{s^{-1}}$, $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$)



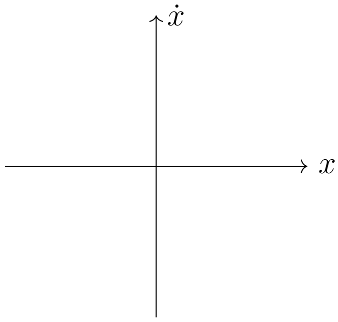
$Q = 0,5$
($x_0 = 100\,\mathrm{mm}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\lambda = 2\,\mathrm{s^{-1}}$, $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$)



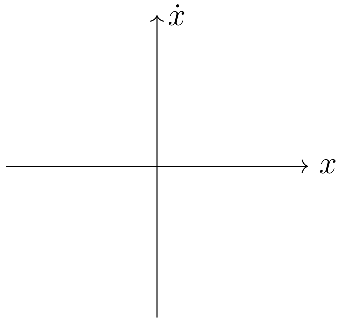
$Q = 0,25$
($x_0 = 100\,\mathrm{mm}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\lambda = 2\,\mathrm{s^{-1}}$, $\omega_0 = 1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$)



$Q = 5$
($x_0 = 0\,\mathrm{mm}$, $v_0 = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\lambda = 0{,}2\,\mathrm{s^{-1}}$, $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$)



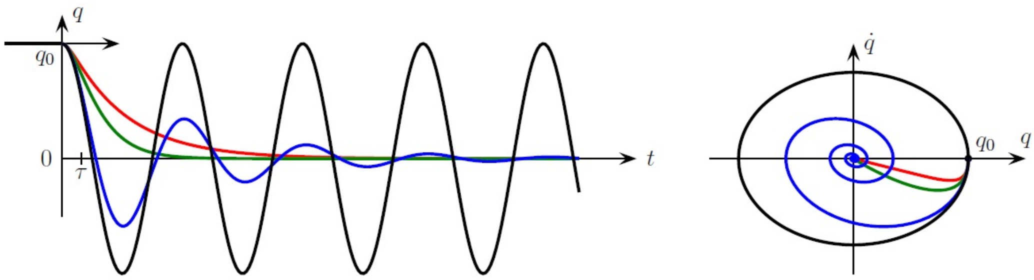
$Q = 2,5$
($x_0 = 50\,\mathrm{mm}$, $v_0 = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\lambda = 0{,}4\,\mathrm{s^{-1}}$, $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$)



$Q = 0,5$
($x_0 = -100\,\mathrm{mm}$, $v_0 = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\lambda = 1{,}7\,\mathrm{s^{-1}}$, $\omega_0 = 1{,}7\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$)

> **Remarque**
> Pour un oscillateur harmonique, le portait de phase est une courbe fermée (une ellipse).

Cas des circuits RLC et LC en régime libre :



$q(t)$ et portraits de phase dans les différents régimes d'oscillations (amorties ou non)