Exercice 3

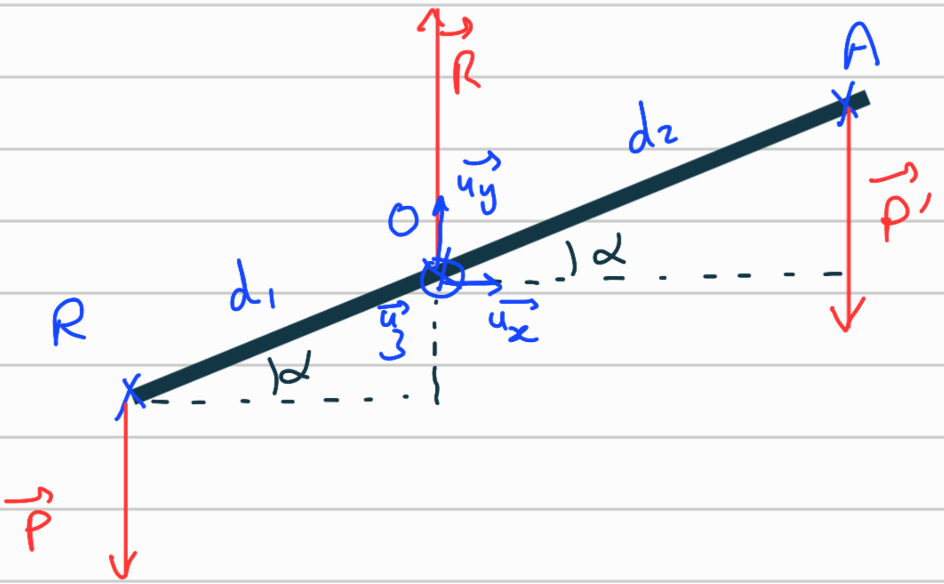
Q1. On suppose que l'ensemble {pierre-levier-Archi.} est à l'équilibre.

Bilan des forces :
* poids de la pierre $\vec{P}$
* poids d'Archimède $\vec{P'}$
* réaction en O $\vec{R}$.

$\Rightarrow$ la somme des moments de ces forces par rapport à O_z est donc nulle.

$$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{O_z}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{O_z}(\vec{P'}) = 0$$

On a donc $(\overrightarrow{OR} \times M\vec{g}).\vec{u_z} + (\overrightarrow{OA} \times m\vec{g}).\vec{u_z} + (\overrightarrow{OO} \times \vec{R}).\vec{u_z} = 0$



$+ d_1 \cos\alpha . Mg - d_2 \cos\alpha . mg + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{M.d_1}{d_2}}$

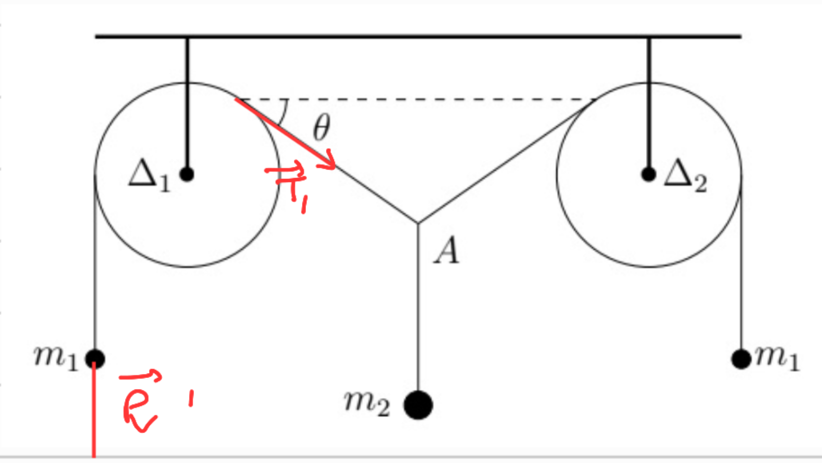
Q2. Pour être plus efficace avec une force de norme fixée, il faut augmenter le bras de levier. Pour cela, il faut exercer une force perpendiculairement au levier.

$\Rightarrow$ Dans cette configuration, le moment de la force $\vec{F}$ exercée par Archimède par rapport à (O_z) est donc $-Fd_2$.

Pour compenser le moment du poids de la pierre, il faut donc exercer F_{min} telle que : $F_{min} d_2 = mg \cos\alpha \, d_1$.

$$\Rightarrow \quad F_{min} = mg\cos\alpha \frac{d_1}{d_2} \quad \left(\text{au lieu de } mg\frac{d_1}{d_2}\right)$$

Exercice 5 :



on pose les vecteurs unitaires $\odot_{\Delta_1}$ et $\odot_{\Delta_2}$

* Equilibre de la poulie de gauche : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}') + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T_1}) = \vec{0}$$

(L'action mécanique de liaison autour de l'axe Δ_1 est inconnue mais à un moment nul car on néglige les frottements d'axe).

$m_1 g R - T_1 R = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g$.

$\Rightarrow$ on démontre ici que lorsqu'un fil passe par une poulie, la force exercée sur ses extrémités change de direction mais pas de norme.

* Equilibre de la poulie de droite : le même raisonnement donne $T_2 = m_1 g$.

* Equilibre du point A :

$$\vec{P_2} + (-\vec{T_1}) + (-\vec{T_2}) = \vec{0}$$

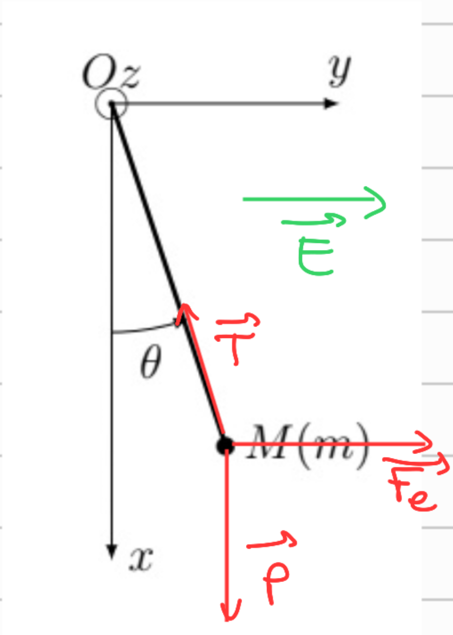
En projetant sur l'axe vertical :

$$m_2 g = 2 m_1 g \sin\theta \Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{m_2}{2m_1}}$$

(Si $m_2 > 2m_1$ cette solution n'est pas définie, la masse m_2 entraîne les 2 masses m_1 et l'ensemble tombe !)

Exercice 7 :

Q1. On étudie le système {boule} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$
* tension du fil $\vec{T}$
* force électrique $\vec{F_e} = Q\vec{E}$

On applique le TMC au système {boule} dans le référentiel terrestre, par rapport à l'axe (Oz) :

$$\frac{dL_{Oz}(M/R)}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_e}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T})$$

Le mouvement de M est circulaire

donc $L_{Oz}(M/R) = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u_z}$

$= (R\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta}) \cdot \vec{u_z}$

$= mR^2\dot{\theta}$

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) = 0$ car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mgR\sin\theta$

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_e}) = QER\cos\theta$

méthode du bras de levier ou calcul direct avec les composantes des vecteurs.

On obtient : $\boxed{mR^2\ddot{\theta} = QER\cos\theta - mgR\sin\theta}$

Q2. Lorsque M est à l'équilibre $\theta = $ cte
donc $\ddot{\theta} = 0$

$\Rightarrow QER\cos\theta_{eq} = mgR\sin\theta_{eq}$

$\Leftrightarrow \boxed{\tan\theta_{eq} = \frac{QE}{mg}}$

Q3. On pose $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll 1\,\text{rad}$)

En faisant les developpements limités d'ordre 1 au voisinage de θ_{eq} on obtient :

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = QER\cos(\theta_{eq}+\varepsilon) - mgR\sin(\theta_{eq}+\varepsilon)$$

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = QER(\cos\theta_{eq} - \varepsilon\sin\theta_{eq}) - mgR(\sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq})$$

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = \underbrace{QER\cos\theta_{eq} - mgR\sin\theta_{eq}}_{=0} - QER\varepsilon\sin\theta_{eq} - mgR\varepsilon\cos\theta_{eq}$$

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = -\varepsilon(QER\sin\theta_{eq} + mgR\cos\theta_{eq})$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{mg\cos\theta_{eq} + QE\sin\theta_{eq}}{mR}\varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0}$$

avec $$\omega_0^2 = \frac{mg\cos\theta_{eq} + QE\sin\theta_{eq}}{mR}$$

$$= \frac{mg\cos\theta_{eq}}{mR}\left(1 + \frac{QE\sin\theta_{eq}}{mg\cos\theta_{eq}}\right)$$

$= \tan\theta_{eq}$

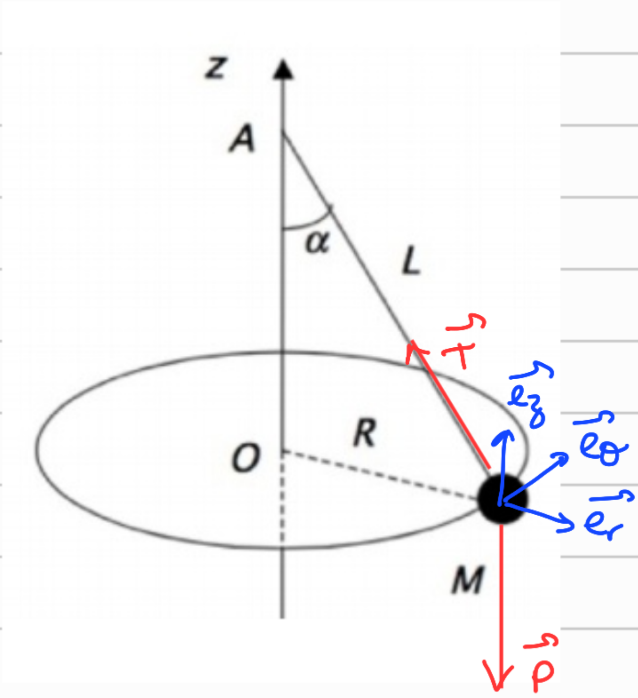
$$= \frac{mg\cos\theta_{eq}}{mR}(1 + \tan^2\theta_{eq})$$

Et $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg\cos\theta_{eq}(1+\tan^2\theta_{eq})}}$$

Exercice 8 :

Q1. Il est judicieux de calculer les moments des forces par rapport à A ($\vec{\mathcal{M}}_A(\vec T) = \vec 0$).

Q2.



avec $AO = L\cos\alpha$ et $R = L\sin\alpha$

Bilan des forces sur la masse : $\vec T$ et $\vec P$.

TMC appliqué à M dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{L_A}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec P) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec T)$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec T) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec T = \vec 0$ car $\overrightarrow{AM}$ et $\vec T$ sont colinéaires.

et $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec P) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec P = \underbrace{\overrightarrow{AO} \wedge \vec P}_{= \vec 0 \text{ car } \overrightarrow{AO} \text{ et } \vec P \text{ colinéaires}} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec P$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = R\vec{u_r} \wedge (-mg\vec{u_z}) = mgR\vec{u_\theta}$$

$$= mgL\sin\alpha \, \vec{u_\theta}$$

et $\quad \vec{L}_A(M) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/R)$

$$= (\vec{AO} + \vec{OM}) \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$= -L\cos\alpha \, \vec{u_z} \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta} + L\sin\alpha \, \vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$= mL^2\sin\alpha.\cos\alpha\,\dot{\theta}\,\vec{u_r} + L^2\sin^2\alpha\, m\dot{\theta}\vec{u_z}$$

$$= \frac{1}{2}mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\omega\,\vec{u_r} + \underbrace{L^2\sin^2\alpha\, m\omega\,\vec{u_z}}_{=cte}$$

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\omega^2\,\vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \quad mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\omega^2 = mgL\sin\alpha.$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}}$$

Si $\omega \to +\infty$ $\cos\alpha \to 0$ donc $\alpha \to \pi/2$

Si $\frac{g}{\omega^2 L} > 1$ pas de solution $\left(\omega < \sqrt{g/L}\right)$