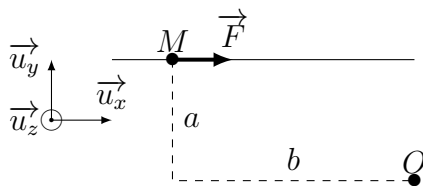


MECA5 - TD

Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 QCM

- Q1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs. Vrai Faux
- Q2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs. Vrai Faux
- Q3. Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie. Vrai Faux
- Q4. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.
 Vrai Faux
- Q5. À quelle(s) autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ?
 vitesse énergie puissance travail
- Q6. Le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel M , de masse m , de vitesse \vec{v} et subissant une force \vec{F} :
 s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$;
 s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$;
 est nul si sa trajectoire est une droite passant par le point O .
- Q7. Une force dont la droite d'action est normale à un axe (Δ) est appliquée à un point matériel. Son moment par rapport à (Δ) :
 a la même dimension que le travail d'une force ;
 permet de savoir si la force modifie la vitesse du point matériel ;
 a un module inversement proportionnel à son bras de levier par rapport à (Δ).
- Q8. Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ de la force \vec{F} d'intensité F par rapport au point O est :



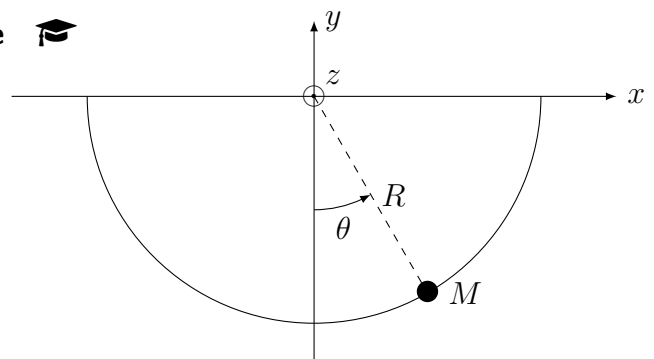
- $Fa\vec{u}_z$ $-Fb\vec{u}_y$ $-Fb\vec{u}_z$ $-Fa\vec{u}_z$

Exercice n°2 Mouvement sur un guide circulaire

On étudie le mouvement d'un point M astreint à se déplacer sur un support circulaire de centre O et de rayon R .

On repère la position de M avec l'angle θ .

On prend en compte les frottements fluides modélisés par la force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

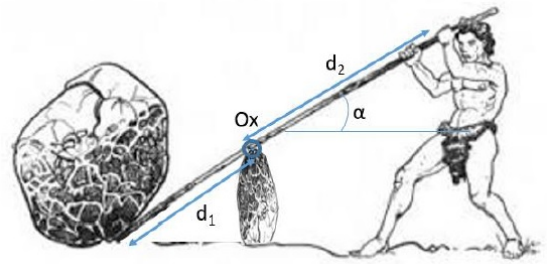


- Q1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O et par rapport à (Oz) .
- Q2. Exprimer le moment des forces par rapport à l'axe (Oz) .
- Q3. Établir l'équation du mouvement par application d'une loi du moment cinétique.

Exercices ★

Exercice n°3 Archimède soulève une pierre

Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200 \text{ kg}$. Les longueurs valent $d_1 = 50 \text{ cm}$ et $d_2 = 1,5 \text{ m}$ et $\alpha = 60^\circ$. On admet que le rocher commence à se soulever quand les moments par rapport à l'axe Ox du poids du rocher et de la force d'Archimède sont opposés.

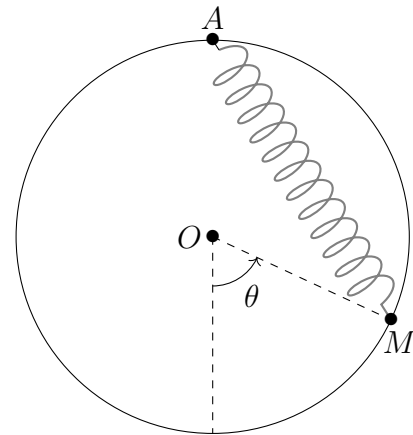


- Q1. Archimède se suspend au levier. Quelle doit être la masse minimale pour que le rocher se soulève ?
 Q2. Archimède décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier. Comment doit-il procéder pour être plus efficace et quelle force doit-il exercer ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

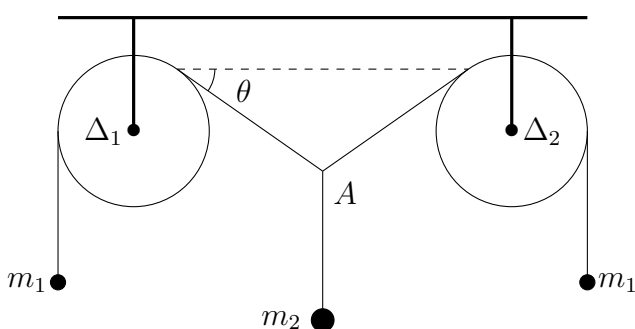
Exercice n°4 Masselotte sur un cerceau vertical 🎓

Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m , est assujettie à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de centre O et de rayon R .

La masselotte est reliée au point A par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .



- Q1. Exprimer les différentes forces subies par la masselotte en fonction de l'angle θ dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
 Q2. Établir l'équation du mouvement de la masselotte en appliquant le théorème du moment cinétique.

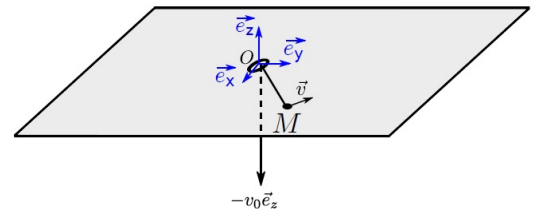
Exercice n°5 Équilibre de 2 poulies

On s'intéresse au dispositif ci-contre, à l'équilibre et dans un plan. Les deux poulies sont identiques, de même rayon R et masse m_0 , et les deux liaisons pivot avec le bâti sont modélisées par des liaisons parfaites : les frottements d'axe sont négligés. Les fils sont également tous supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils sont inextensibles et de masse négligeable. Enfin, on suppose que les fils ne glissent pas sur les poulies.

Déterminer l'angle θ et analyser qualitativement à quelle condition l'équilibre est possible.

Exercice n°6 Masse attachée à une ficelle 🎓

Un point matériel M de masse m , attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée vers le bas par un opérateur à une vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{e}_z$ ($v_0 > 0$). La masse m est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe Oz , et la longueur du fil sur le plan est initialement ℓ_0 .



- Q1. Choisir un système de coordonnées adaptées. Donner l'expression de la distance $r(t) = OM$ en fonction de ℓ_0 , v_0 et t .
Donner l'expression du moment cinétique du point M par rapport à O en fonction des mêmes grandeurs, ainsi que de m et $\dot{\theta}$.
- Q2. Appliquer le théorème du moment cinétique au point M .
- Q3. En déduire l'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ du point M .
- Q4. Donner l'expression de l'énergie cinétique du point M . Comment varie-t-elle? D'où provient cette augmentation d'énergie?

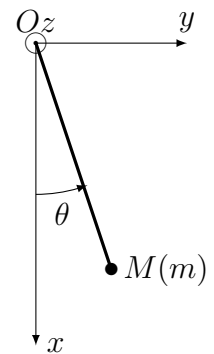
Exercices ★ ★

Exercice n°7 Pendule électrostatique

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2,3 \times 10^{-4} \text{ C}$. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$ avec $E = 500 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$.

La longueur du pendule est $OM = R = 10 \text{ cm}$ et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20 \text{ g}$.

L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



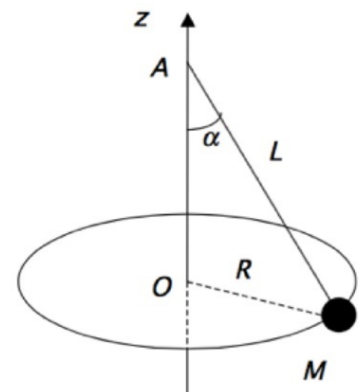
- Q1. Appliquer la loi du moment cinétique à M .
- Q2. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.
- Q3. On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. Déterminer la pulsation ω_0 des oscillations puis calculer sa période T_0 .
On admettra que pour $|\varepsilon| \ll \theta_e$, on a $\cos(\theta_e + \varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e + \varepsilon) \approx \sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)$.

m

Exercice n°8 Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Az . On donne une certaine vitesse initiale à la masse, afin de la faire tourner autour l'axe z . On note ω la vitesse angulaire ainsi atteinte. On note Oxy le plan dans lequel ce mouvement a lieu, et α l'angle qui s'établit entre l'axe et le fil. On suppose un régime stationnaire atteint : α et ω restent constants.

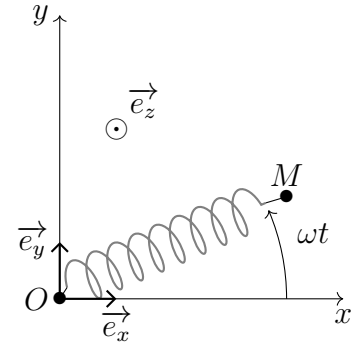
On utilisera la base cylindrique dans le plan Oxy , d'axe Oz . La pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_z$.



- Q1. Étant donné que la force de tension du fil sur la masse est inconnue, par rapport à quel point va-t-il être judicieux de calculer les moments des forces ?
- Q2. À l'aide du théorème du moment cinétique, donner l'expression de l'angle α en fonction de L , ω et g .

Exercice n°9 Ressort tournant

Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le plan (O, x, y, z) horizontal (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Un point M (masse m) est fixé à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , l'autre extrémité étant fixée en O .



- Q1. Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique par rapport à O .
- À $t = 0$, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $\ell_i = 1,2\ell_0$ soit $\overrightarrow{OM}(t = 0) = 1,2\ell_0\vec{e}_x$
- Q2. Calculer \overrightarrow{L}_O . Quelle est la nature de la trajectoire ?
- Q3. Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort $\ell(t) = OM(t)$. Préciser l'intervalle de variation de ℓ .

On lance la particule d'un point $\overrightarrow{OM}_0 = \overrightarrow{OM}(t = 0) = \ell_1\vec{e}_x$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \ell_1\omega\vec{e}_y$, orthogonale à \overrightarrow{OM}_0 . Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O, x, y) .

- Q4. Préciser \overrightarrow{L}_O en fonction de r et $\dot{\theta}$ puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L le module de \overrightarrow{L}_O .
- Q5. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique. Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ? Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique E_m . Préciser l'expression de E_m en fonction des conditions initiales et en fonction de r , \dot{r} , $\dot{\theta}$, m , k et ℓ_0 .
- Q6. Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$. Préciser l'expression de $E_{p,\text{eff}}(r)$ et tracer son allure.
- Q7. La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?
- Q8. La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours du mouvement ?
- Q9. La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?

On cherche à déterminer une condition entre ℓ_1 et v pour avoir un mouvement circulaire.

- Q10. Montrer que dans ce cas, le mouvement est uniforme.
- Q11. Déterminer ℓ_1 en fonction de k , ℓ_0 et ω . Est-elle valable pour tout ω ?