

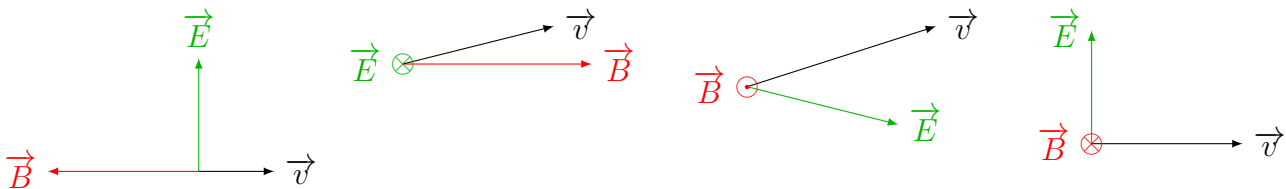
MECA4 - TD

Rappel : un vecteur noté \odot est de direction perpendiculaire au plan de la feuille et orienté de la feuille vers vous (il « sort » de la feuille), alors qu'un vecteur noté \otimes est lui aussi de direction perpendiculaire au plan de la feuille mais orienté de la feuille vers le sol (il « s'enfonce » dans la feuille).

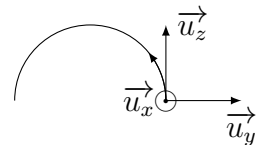
Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Force de Lorentz

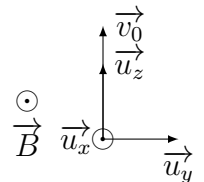
Q1. Tracer sur les 4 schémas ci-dessous les vecteurs forces \vec{f}_E et \vec{f}_B . On suppose que les particules ont toutes une charge positive.



Q2. Le schéma ci-contre montre la trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Déterminer l'orientation du champ magnétique \vec{B} .



Q3. Un proton entre dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire dans la configuration représentée ci-contre. Déterminer le sens de la trajectoire.

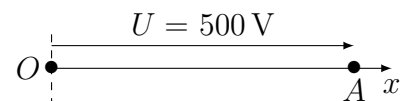


Exercice n°2 Électron dans un microscope électronique

Dans le canon d'un microscope électronique, un faisceau d'électrons est extrait de la cathode et accéléré par une anode avec une différence de potentiel $U = 500 \text{ V}$.

Un électron est extrait de la cathode en O sans vitesse initiale. Déterminer sa vitesse en A par une méthode énergétique.

$$v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \text{AN : } v_A = 1,3 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$



Exercices ★

Exercice n°3 LHC

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de **27 kilomètres de circonférence** et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun.

Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants.

L'énergie cinétique des protons (7 TeV) est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention. Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédite par le modèle standard.

Dans cet exercice, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

Particule dans un champ électrique constant et uniforme

- Q1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} ?
- Q2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Q3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} .
Que peut-on dire du vecteur accélération ?

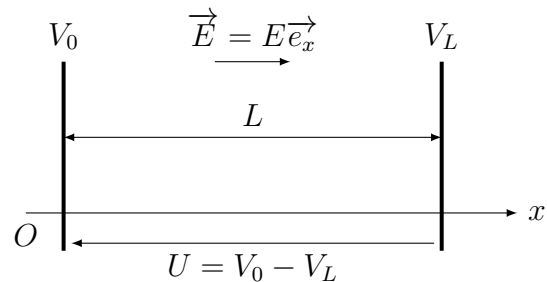


FIGURE 1 – Dispositif d'accélération des protons

- Q4. Montrer que la force électrique est conservative et établir l'expression de l'énergie potentielle.
- On admet qu'en considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, le potentiel du plan $x = L$ s'écrit $V_L = -EL$.
- Q5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer son énergie cinétique en sortie de la zone d'accélération, en fonction de la tension U .

Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accelératrice U_0 .

- Q6. Exprimer l'énergie cinétique du proton, puis sa vitesse v_0 en O , en fonction de U_0 , e et m_p .

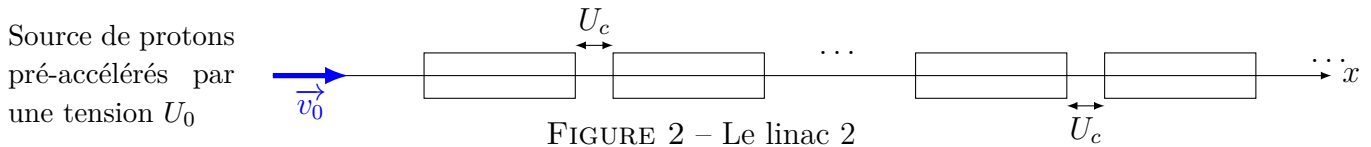


FIGURE 2 – Le linac 2

- Q7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?
- Q8. Exprimer l'énergie cinétique du proton à la sortie du n -ième tube en fonction de U_c et U_0 .
- Q9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^e tube pour $U_0 = 200$ kV, $U_c = 2000$ kV.
- Q10. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS).

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

À $t = 0$ sa vitesse \vec{v}_0 est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 3.

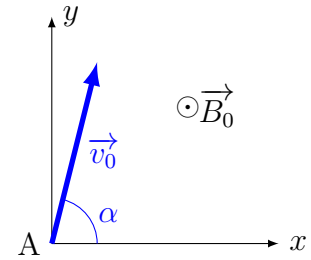


FIGURE 3 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

- Q11. Donner l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique \vec{B}_0 .
- Q12. Reproduire la figure 3 et représenter la force magnétique subie par le proton en A.
Exprimer la norme de cette force.
- Q13. Calculer un ordre de grandeur de la force précédente (avec $B \approx 1$ T) et conclure à l'action du poids sur le mouvement du proton.
- Q14. Montrer que le travail associé à cette force est nul à chaque instant. En déduire une caractéristique du mouvement du proton.
- Q15. Le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique. Montrer que la trajectoire du proton est un cercle.
- Q16. Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e et v_0 ; puis en fonction de B_0 , e et de la norme de la quantité de mouvement p du proton.
- Q17. Quelle est la nature du mouvement du proton après sa sortie de la zone de champ magnétique ?

Effets relativistes

Pour des vitesses approchant la vitesse c de la lumière dans le vide au fur et à mesure de l'augmentation de l'énergie des particules, il faut prendre en compte les effets relativistes.

On peut montrer que l'on peut garder, pour le rayon de courbure R des particules dans un champ magnétique uniforme en fonction de leur quantité de mouvement p , l'expression de la question Q16 à condition de prendre $p = \gamma m v$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, où v est la vitesse des particules.

De plus, on définit l'énergie \mathcal{E} d'une particule par la relation $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o + \mathcal{E}_c = \gamma m c^2$, où $\mathcal{E}_o = m c^2$ est son énergie au repos et \mathcal{E}_c son énergie cinétique.

- Q18. Donner alors successivement, pour les protons, les expressions de γ (en fonction de \mathcal{E}_c , m_p et c), v_0/c (en fonction de γ), et enfin R (en fonction de γ , m_p , v_0 , e et B_0).
- Q19. À l'aide des résultats de la question précédente et des données numériques fournies dans le texte, estimer la valeur du champ magnétique régnant à l'intérieur du LHC.

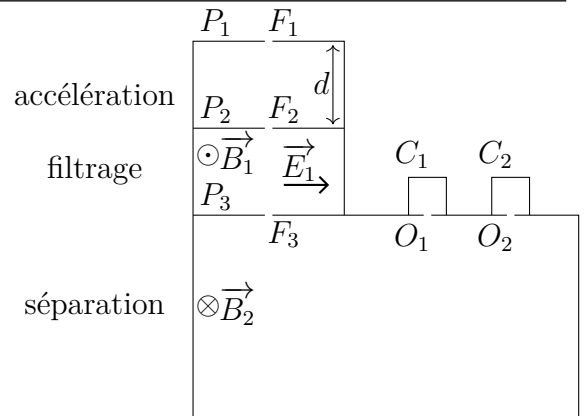
Les aimants utilisés, de 15 m de long et d'environ 35 tonnes, produisent en leur cœur un champ magnétique environ 200 000 fois plus grand que le champ magnétique terrestre. Le LHC en nécessite 1232.

Exercices ★ ★

Exercice n°4 Spectromètre de masse

Le spectromètre de masse permet de mesurer la masse des particules chargées avec une telle précision qu'il peut servir à déterminer les compositions isotopiques. Une source émet des ions de mercure $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$. Ces ions passent dans le spectromètre de masse où ils sont accélérés puis séparés afin de mesurer leur rapport isotopique.

Données : $d = 1,00 \text{ m}$; $U = 1,00 \times 10^4 \text{ V}$; $E_1 = 5,30 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; $B = 0,383 \text{ T}$; $B_2 = 0,200 \text{ T}$; $F_3O_1 = 1,44 \text{ m}$; $F_3O_2 = 1,45 \text{ m}$

**Accélération des ions**

Des ions de masse m et de charge $q > 0$ sont émis par une source (en F_1) sans vitesse initiale. Ils sont accélérés entre F_1 et F_2 par une différence de potentiel U appliquée entre les plaques P_1 et P_2 .

- Q1. Préciser la plaque de potentiel le plus élevé et représenter sur le schéma le champ accélérateur \vec{E}_0 qui règne dans l'entrefer séparant F_1 de F_2 . Calculer numériquement $\|\vec{E}_0\|$.
- Q2. Établir l'expression littérale de la vitesse v_0 des ions sur la plaque P_2 .
- Q3. Calculer v_{01} et v_{02} , les vitesses respectives des ions $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ à leur arrivée en F_2 .

L'hypothèse de vitesse nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique, il en résulte une dispersion des vitesses en F_2 . Il faut donc réaliser un filtrage en vitesse pour améliorer les performances de l'appareil.

Filtre de vitesse

Les ions traversent la plaque P_2 par la fente F_2 avec un vecteur vitesse perpendiculaire à P_2 . Ils entrent dans l'espace séparant P_2 et P_3 où règnent :

- un champ \vec{E}_1 uniforme situé dans le plan du schéma et parallèle à P_2 ;
- un champ \vec{B}_1 uniforme perpendiculaire au plan du schéma.

- Q4. Sous quelle condition les ions peuvent-ils avoir une trajectoire rectiligne les amenant de F_2 à F_3 ?
- Q5. En déduire que seuls les ions de vitesse $v_0 = \frac{E_1}{B_1}$ parviennent en F_3 .
- Q6. Calculer cette vitesse et en déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de \vec{E}_1 pour assurer le passage de $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ pendant 1 minute, puis on change sa valeur pour que les ions $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ passent pendant 1 minute. Pendant cette opération, la valeur de \vec{B}_1 reste constante.

Séparation des ions

Après F_3 , les ions pénètrent dans une région où ne règne qu'un champ magnétique uniforme \vec{B}_2 normal au plan du schéma. Ils sont déviés vers les collecteurs C_1 et C_2 .

- Q7. Montrer que le mouvement d'un ion dans cette région est uniforme.
- Q8. Sachant que la trajectoire des ions est circulaire, déterminer son rayon R_1 pour les ions $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et R_2 pour les ions $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.
- Q9. Déterminer quel collecteur (C_1 ou C_2) reçoit $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et quel collecteur reçoit $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.
- Q10. La distance δ qui sépare les points O_1 et O_2 paraît-elle suffisante pour installer les détecteurs de particules ?
- Q11. Les quantités d'électricité reçues en 1 minute par les collecteurs C_1 et C_2 sont $Q_1 = 1,20 \times 10^{-7} \text{ C}$ et $Q_2 = 3,5 \times 10^{-8} \text{ C}$. Déterminer la composition du mélange d'ion et en déduire la masse atomique du mercure.