MECA1 - TD

Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Éléments cinématiques en coordonnées cartésiennes

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant :

$$\begin{cases} x(t) = a_0 t^2 + x_0 \\ y(t) = -v_0 t \\ z(t) = z_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad x_0 = 1\,\mathrm{m} \ , \ z_0 = -1\,\mathrm{m} \ , \ a_0 = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \quad \text{et} \quad v_0 = 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Q1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.

Q2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 2\,\mathrm{s}$.

Q3. Calculer la norme de l'accélération de M à la date $t = 1\,\mathrm{s}$.

Exercice n°2 Éléments cinématiques en coordonnées cylindriques

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant :

$$\begin{cases} r(t) = a_0 t^2 + r_0 \\ \theta(t) = \omega t + \theta_0 \\ z(t) = -v_0 t \end{cases} \quad \text{avec} \quad r_0 = 1\,\mathrm{m} \ , \ a_0 = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \ , \ \omega = 3\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \ , \ \theta_0 = 2\,\mathrm{rad} \quad \text{et} \quad v_0 = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Q1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

Q2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 1\,\mathrm{s}$.

Q3. Calculer la norme de l'accélération de M à l'instant initial $t = 0\,\mathrm{s}$.

Exercices ⋆

Exercice n°3 Électron dans le modèle de Bohr

Le modèle de Bohr est un modèle planétaire semi-classique de l'atome d'hydrogène (qui est composé d'un proton et d'un électron). Dans ce modèle, l'électron a une trajectoire circulaire et uniforme autour du proton, de rayon $a_0 = 0{,}53 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$. La fréquence de révolution est égale à $f = 6{,}6 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$.

Q1. Déterminer la vitesse de l'électron sur sa trajectoire et calculer sa norme.

Q2. Déterminer l'accélération de l'électron et calculer sa norme.

Exercice n°4 Excès de vitesse

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à $100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de $90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ au bout de $10\,\mathrm{s}$.

Q1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?

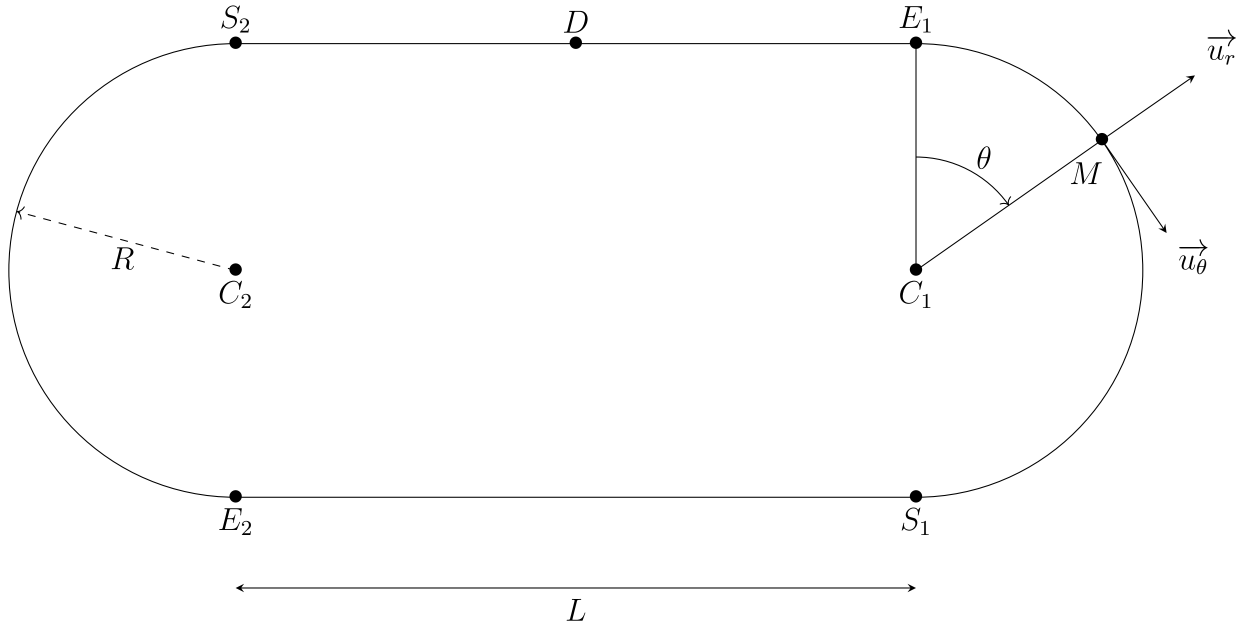
Q2. Quelle distance aura-t-il parcourue ?

Q3. Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

Exercice n°5 Cycliste sur un vélodrome

On s'intéresse à un cycliste, considéré comme un point matériel M, qui s'entraîne sur un vélodrome constitué de deux demi-cercles reliés par deux lignes droites. Le cycliste part de D avec une vitesse nulle.

Données : $L = 62\,\mathrm{m}$; $R = 20\,\mathrm{m}$



Q1. Il exerce un effort constant, ce qui se traduit par une accélération constante a_1 jusqu'à l'entrée E_1 du premier virage. Calculer le temps t_{E_1} de passage en E_1 ainsi que la vitesse v_{E_1} en fonction de a_1 et L.

Q2. Dans le premier virage, le cycliste a une accélération tangentielle constante égale à a_1. Déterminer le temps t_{S_1} de passage en S_1 ainsi que la vitesse v_{S_1} en fonction de a_1, L et R.

Q3. De même, en considérant l'accélération tangentielle constante tout au long du premier tour égale à a_1, déterminer les temps t_{E_2}, t_{S_2} et t_D (après 1 tour), ainsi que les vitesses correspondantes.

Q4. La course s'effectue sur 4 tours ($1\,\mathrm{km}$) mais on ne s'intéresse donc qu'au premier effectué respectivement en $T_1 = 18{,}155\,\mathrm{s}$ (temps du britannique Chris Hoy aux championnats du monde de 2007). Déterminer la valeur de l'accélération a_1 ainsi que la vitesse atteinte en D. La vitesse mesurée sur une piste est d'environ $60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Que doit-on modifier dans le modèle pour se rapprocher de la réalité ?

Q2. $t_{S_1} = \sqrt{\dfrac{L+2\pi R}{a_1}}$; $v_{S_1} = \sqrt{a_1(L+2\pi R)}$ Q3. $t_{E_2} = \sqrt{\dfrac{3L+2\pi R}{a_1}}$; $t_{S_2} = 2\sqrt{\dfrac{3L+4\pi R}{a_1}}$; $t_D = 2\sqrt{\dfrac{L+\pi R}{a_1}}$

Q4. $v_D = 99\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$

Exercice n°6 Ascenseur

Un ascenseur est animé d'un mouvement rectiligne vertical ascendant :

- uniformément accéléré d'accélération $a_a = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ pendant une durée $t_a = 3{,}0\,\mathrm{s}$
- uniforme pendant une durée $t_u = 7\,\mathrm{s}$
- uniformément décéléré d'accélération de norme $a_d = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ pendant une durée t_d jusqu'à l'arrêt.

Q1. Tracer la courbe représentant la vitesse en fonction du temps et en déduire la durée t_d. Déterminer la distance totale parcourue par lecture graphique.

Q2. Tracer la courbe représentant l'accélération en fonction du temps. Comment peut-on vérifier que l'ascenseur s'est bien arrêté ?

Q3. Tracer l'allure de la courbe représentant la position en fonction du temps.

Exercices ⋆ ⋆

Exercice n°7 Durée d'un demi-tour en avion de chasse

Le rafale de Dassault Aviation est un avion de combat développé pour la marine nationale et l'armée de l'air françaises.
Données :

- accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
- un homme entraîné peut supporter une accélération maximale de $10 \times g$
- Caractéristiques de rafale : $m \approx 20$ tonnes ; vitesse maximale : $v = 2200\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$; altitude plafond : $h = 15\,\mathrm{km}$

Q1. Exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})}$ et l'accélération $\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R})}$, par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$ sur la base polaire. Comment ces expressions sont-elles simplifiées dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ?

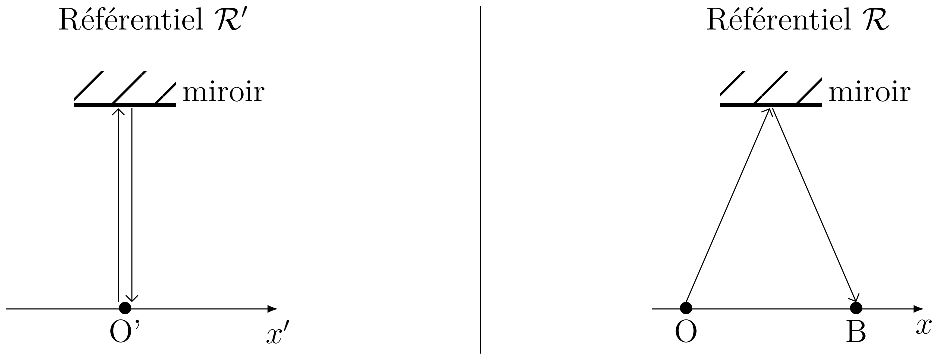
Q2. Déterminer le rayon de courbure minimal tolérable pour un pilote.

Q3. Quelle est la durée minimale d'un demi-tour en rafale à vitesse maximale ?

Q2. $R_{\min} = 3810\,\mathrm{m}$ Q3. $\Delta t = 20\,\mathrm{s}$

Exercice n°8 Dilatation du temps en mécanique relativiste

Cet exercice illustre une conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière postulée par la relativité restreinte : la dilatation du temps dans un référentiel en mouvement.
On considère deux observateurs : un chef de gare immobile sur son quai et un contrôleur, immobile dans un train se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse V par rapport au quai. Dans tout l'exercice, on distinguera le temps dans le référentiel du train $\mathcal{R}'$, noté t' et celui dans le référentiel $\mathcal{R}$ du quai, noté t (ces deux référentiels étant galiléens).
À l'instant $t' = 0$, le contrôleur envoie une impulsion lumineuse (faisceau laser par exemple), verticalement vers un miroir situé à une distance L. Cet instant est également choisi comme l'instant $t = 0$ dans $\mathcal{R}$. À cet instant, le contrôleur est en O', le chef de gare en O et $O = O'$.



Q1. On raisonne tout d'abord dans le référentiel $\mathcal{R}'$. En admettant que la lumière s'y propage à c, quel est le temps T' mis par la lumière pour atteindre le miroir et revenir au contrôleur ?

Q2. On admet que conformément à la théorie de la relativité restreinte, la lumière se propage également à c dans le référentiel $\mathcal{R}$. Compte-tenu du déplacement de M dans $\mathcal{R}$ durant la propagation lumineuse, son trajet y est triangulaire.

(a) Établir la relation entre l'angle α (fait par la direction du faisceau lumineux avec l'horizontale dans $\mathcal{R}$, c, L et le temps T mis par la lumière pour revenir au contrôleur dans $\mathcal{R}$.

(b) Établir une autre relation entre α, V et c. En déduire T.

Q3. En conclure que l'invariance de la vitesse de la lumière dans les deux référentiels implique qu'on a $T = \gamma T'$, avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$. Justifier alors le terme de « dilatation des durées » entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Exercice n°9 Trajectoire d'un point d'une roue

On repère un point M sur la circonférence d'une roue de rayon R. Initialement, ce point M coïncide avec O, origine du repère. Ensuite, au cours du mouvement, on appelle $\theta(t)$ l'angle $\overrightarrow{CM}$ et la verticale descendante. La roue roule sans glisser sur le sol de telle manière que l'abscisse x_I du point de contact I de la roue avec le sol soit égale à l'arc de cercle IM. Le vitesse du centre C de la roue est $\overrightarrow{v(C)} = v_0\overrightarrow{u_x}$ où v_0 est une constante positive.

Q1. Faire un schéma.

Q2. Trouver les coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t), z(t))$.

Q3. Tracer la trajectoire du point M sur la calculatrice.

Q2. $x(y) = \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2}$

Exercice n°10 Course de souris

Quatre souris, A, B, C et D se trouvent initialement aux quatre coins d'un carré de côté a et à $t = 0$ chacune se met à courir après l'autre avec la même vitesse constante v : A court après B, B après C, C après D et D après A.

Q1. Faire un schéma à l'instant initial, puis représenter d'une autre couleur la position des 4 souris un court instant après le départ ($t = \mathrm{d}t$).

Q2. Démontrer que les 4 souris forment toujours un carré au cours de leurs poursuite.

Q3. Exprimer la distance $\ell(t)$ entre deux souris à l'instant t, en fonction de v et de a. En déduire au bout de combien de temps les souris se rencontrent. Quelle distance L auront-elles parcourue ?

Q4. Faire un schéma à une date t quelconque, puis représenter la base locale liée à la souris A. Que dire de l'orientation de son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_A}(t)$? (le représenter sur le schéma).

Q5. Déterminer la trajectoire de la souris A, avec comme conditions initiales en coordonnées polaires :

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad C\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{3\pi}{4}\right)$$

Q5. $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \exp\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right)$