

Entraînement OSC

Q1. Force $\vec{F}_r$ appliqué au système {dalle}

$$\vec{F}_r = -k(l - l_0) \vec{e}_x$$

avec l'origine du repère placé au niveau du support on a $x = l$.

$$\vec{F}_r = -k(x - l_0) \vec{e}_x$$

Q2. A l'équilibre $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{P} + \vec{F}_r + \vec{f} = \vec{0}$$

Or à l'équilibre $\vec{f} = \vec{0}$ car $\dot{x} = 0$.

$$\Rightarrow m\vec{g} - k(x_{eq} - l_0) \vec{e}_x = \vec{0}$$

En projection sur l'axe Ox :

$$-mg - k(x_{eq} - l_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

* Vérification de l'homogénéité :

$$[l_0] = L$$

$$\left[\frac{mg}{k}\right] = \Pi \cdot L \cdot T^{-2} \cdot [k]^{-1} \text{ or } [k] = \Pi \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-1}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{mg}{k} \right] = \Pi \cdot L \cdot T^{-2} \cdot \Pi^{-1} \cdot T^2 = L.$$

On a donc bien $[x_{eq}] = L$.

* Vérification de la pertinence physique :

$x_{eq} < l_0$, ce qui est cohérent puisque le ressort est comprimé.

Q3. Lorsque le danseur monte sur la dalle, le système est {masse + danseur} de masse $m + n$

$-(m+n)g - k(x'_{eq} - l_0) = 0$ au nouvel état d'équilibre.

$$x'_{eq} = l_0 - \frac{(m+n)g}{k}$$

$$\delta = l_0 - \frac{mg}{k} - l_0 + \frac{(m+n)g}{k}$$

Soit $\delta = \frac{ng}{k}$

Q4. La relation précédente donne $k = \frac{ng}{\delta}$

D'après le critère donné $\delta_{max} = 1 \text{ cm}$
Pour $n = 70 \text{ kg}$ on obtient :

$$k = \frac{70 \cdot 9,8}{10^{-2}} = \underline{7 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}}$$

Q5. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {dalle} :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{f} + \vec{F} + \vec{F}_d$$

En projetant sur Ox on obtient :

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - l_0) - D\dot{x} + F - \alpha\dot{x}$$

$$\text{or } x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \Rightarrow l_0 = x_{eq} + \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg - k\left(x - x_{eq} - \frac{mg}{k}\right) - (D + \alpha)\dot{x} + F$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}) - (D + \alpha)\dot{x} + F$$

En posant $X = x - x_{eq}$, on a $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$

$$m\ddot{X} = -kX - (D + \alpha)\dot{X} + F$$

$$\ddot{X} + \frac{D + \alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F}{m}$$

$$\text{Par identification } \begin{cases} a_0 = \frac{k}{m} \\ b_0 = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Q6. Cette équation différentielle est linéaire (seulement des termes en x , $\dot{x}$ et $\ddot{x}$).

Q7. En faisant l'hypothèse d'un pas par seconde, on a $f = 1 \text{ Hz}$
d'où $\omega = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\text{AN: } L\omega = 2\pi \cdot 1,67 \cdot 10^{-3} = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ u.s.I.}$$
$$R = 19,2 \text{ u.s.I.}$$

$$\Rightarrow R/L\omega \approx 2 \cdot 10^4.$$

On a donc bien $L\omega \ll R$.

L'inductance L sera donc négligée dans la suite.

Q8.



$$v = \frac{R_L}{R + R_L} u$$

d'après la formule du pont diviseur de tension.

$$\text{Q9. } P_L(t) = v \cdot i = \frac{v^2}{R_L} = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} u^2$$

$$\text{Or } u = K_t \Omega = K_t \gamma \dot{x}$$

$$\Rightarrow P_L(t) = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} (K_t \gamma \dot{x})^2$$

$$\text{d'où } A = \frac{R_L}{(R+R_L)^2}$$

$$\text{Q10. } P_u = u \cdot i \quad \text{avec} \quad i = \frac{u}{R+R_L}$$

$$\Rightarrow P_u = \frac{u^2}{R+R_L}$$

$$P_u = \frac{(k_L \dot{x})^2}{R+R_L}$$

$$\text{On en déduit : } P_p = \frac{P_u}{\eta}$$

$$\Rightarrow P_p = \frac{(k_L \dot{x})^2}{\eta(R+R_L)}$$

$$\text{Q11. } \alpha = \frac{(k_L \dot{x})^2}{\eta(R+R_L)}$$

$$\text{AN: } \alpha = \frac{(7,28 \cdot 10^{-2} \cdot 22 \cdot 10^4)^2}{0,50 (150 + 19,2)}$$

$$\alpha = \underline{3,0 \cdot 10^4 \text{ N.s.m}^{-1}}$$

On a donc $D \ll \alpha$, ce qui justifie de négliger l'amortissement mécanique par rapport à l'amortissement électromagnétique.

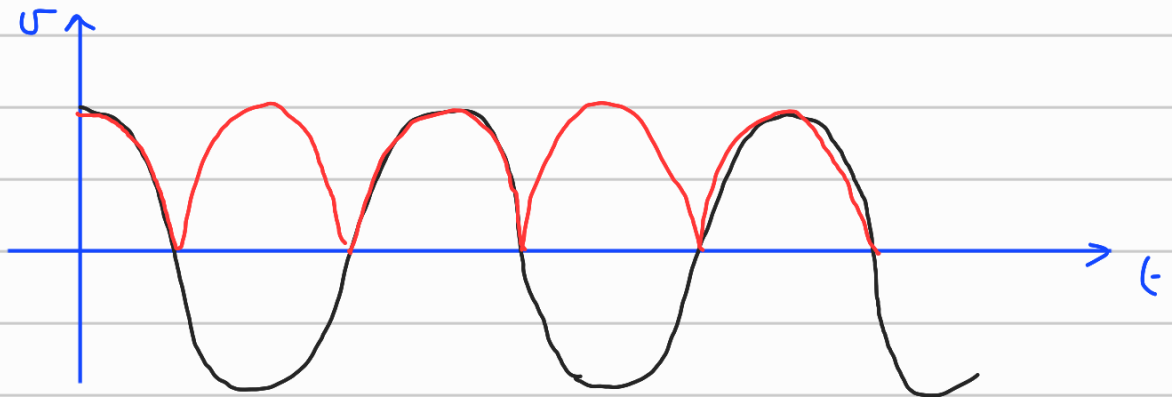
Q12. Caractéristique d'une diode idéale:



Q13. Pour $u > 0$ D_1 et D_3 sont passantes } $v = u > 0$
 D_2 et D_4 sont bloquées

Pour $u < 0$ D_1 et D_3 sont bloquées } $v = -u > 0$
 D_2 et D_4 sont passantes

Q14.



Le pont de diodes redresse la tension

Q15 D'après les lois intensités-tensions :

$$\left. \begin{aligned} [R_L] &= \frac{[u]}{[i]} \\ \text{et } [C] &= \frac{[i]}{[u]/[dt]} \end{aligned} \right\} [R_L]^\alpha \cdot [C]^\beta = \frac{[u]^\alpha \cdot [i]^\beta}{[i]^\alpha [u]^\beta} [dt]^\beta$$

$$\text{Or } [Z] = T \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = R_L C}$$

Q16. D'après l'énoncé il faut $R_L C \gg \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{C \gg \frac{2\pi}{\omega R_L}}$$

$$\text{AN: } C_{\min} = \frac{2\pi}{10.150} = \underline{4,2 \cdot 10^{-3} \text{ F}}$$

C'est une valeur élevée, de l'ordre du millifarad. On utilise des capacités de l'ordre du microfarad ou nanofarad en TP.

$$\text{Q17. Par identification: } \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{k/m} \\ Q &= \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \end{aligned}}$$

ω_0 est la pulsation propre du système, sa dimension est T^{-1} (inverse d'un temps).

Q est son facteur de qualité (sans dimension)

Q18. AN pour Q : $Q = \frac{\sqrt{35 \cdot 1,5 \cdot 10^5}}{3 \cdot 10^4} \approx 0,076 < \frac{1}{2}$

$Q < \frac{1}{2}$ donc le régime transitoire d'évolution de x est périodique

Q19. On recherche la solution particulière sous forme d'une constante:
 $\ddot{x}_p = 0$; $\dot{x}_p = 0$

On obtient
$$x_p = \frac{F_0}{k}$$

Q20. En régime apériodique, la solution est de la forme $x_p(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) > 0$$

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

on peut écrire $\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = \frac{1}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} = \frac{1}{2Q} (1 - 4Q^2)^{1/2}$

Or on a $4Q^2 \ll 1$ donc $(1 - 4Q^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{4Q^2}{2}$

On obtient : $r_1 \approx -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q} (1 - 2Q^2)$

soit $r_1 \approx -\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0 Q \approx -\frac{\omega_0}{Q}$

et $r_2 \approx -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} (1 - 2Q^2)$

soit $r_2 \approx -\omega_0 Q$.

La solution générale est donc de la forme :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} + A e^{-\omega_0 Q t} + B e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$$

On détermine les constantes A et B avec les conditions initiales : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ (dalle immobile à sa position d'équilibre)

$$x(0) = \frac{F_0}{k} + A + B = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 Q A - \frac{B \omega_0}{Q} = 0 \Rightarrow A = -B/Q^2$$

$$0 = \frac{F_0}{k} + B \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right) \Rightarrow B = \frac{F_0/k}{\frac{1}{Q^2} - 1}$$

$$A = -\frac{F_0/k}{1 - Q^2}$$

D'où $x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0/k}{1 - Q^2} e^{-\omega_0 Q t} + \frac{F_0/k \cdot Q^2}{1 - Q^2} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{1 - Q^2} \left(e^{-\omega_0 Q t} - Q^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)\right)$$

Q 21. $x(t) = x - x_{eq}$ d'où $\dot{x}(t) = \dot{X}(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{k(1 - Q^2)} \left(\omega_0 Q e^{-\omega_0 Q t} - \omega_0 Q e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)$$

Q 22. D'après la question Q9 : $P_L(t) = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} (K_L \gamma \dot{x})^2$

D'où $P_L = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} K_L^2 \gamma^2 \frac{\omega_0 Q F_0^2}{k^2 (1 - Q^2)^2} \left(e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)^2$
 $\Rightarrow P_L$ est bien proportionnel à $F_0^2 \left(e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)^2$

On peut donc écrire: $P_L = K' F_0^2 \left(e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)^2$

(avec $K' = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} K_L^2 \gamma^2 \frac{\omega_0 Q}{k^2 (1 - Q^2)^2}$)

Q23. $\omega_0 Q \ll \frac{\omega_0}{Q}$ donc $e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$ converge beaucoup plus rapidement que $e^{-\omega_0 Q t}$.

$\Rightarrow$ Aux temps longs, il ne reste que le terme en $e^{-\omega_0 Q t}$

$$\Rightarrow P_L = K' F_0^2 (e^{-\omega_0 Q t})^2 = K' F_0^2 e^{-2\omega_0 Q t}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$P_L = K' F_0^2 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{1}{2\omega_0 Q}}$$

$$\text{AN: } \tau = \frac{1}{2\sqrt{\frac{15 \cdot 10^5}{35}} \cdot 7,6 \cdot 10^{-2}} \approx 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ s} = \underline{100 \text{ ms}}$$

Q24. Courbe en trait plein : F_0
 Courbe en pointillés : P_L .

$$F_0 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \text{pour } t \in [1,3 \text{ s} ; 1,6 \text{ s}]$$

$$F_0 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \text{pour } t \in [2,6 \text{ s} ; 3,0 \text{ s}]$$

$$F_0 = 0,4 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \text{pour } t \in [4,2 \text{ s} ; 4,8 \text{ s}]$$

Q25 On remarque que P_L est non nul à l'application de la force et lorsque celle-ci cesse.
 Mathématiquement, d'après la solution $P_L(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$

Ceci est cohérent avec le phénomène physique: la dalle tend à se stabiliser à sa position d'équilibre donc ne bouge plus, $x \rightarrow 0$ d'où $P_L \rightarrow 0$

Q26. D'après la question Q22 la valeur maximale de $P_L(t)$ est proportionnelle à F_0^2 .

Ceci semble cohérent avec la figure 5, sur laquelle on voit que lorsque F_0 est divisée par 2; P_L est divisée par 4.

Q27. Sur le graphique, on lit un temps de décroissance identique pour les différents sauts (sauf pour le 1^{er}; peut-être à cause d'une butée?)

On mesure $50 \approx 0,5s$ ce qui est cohérent avec l'estimation de la question 23.