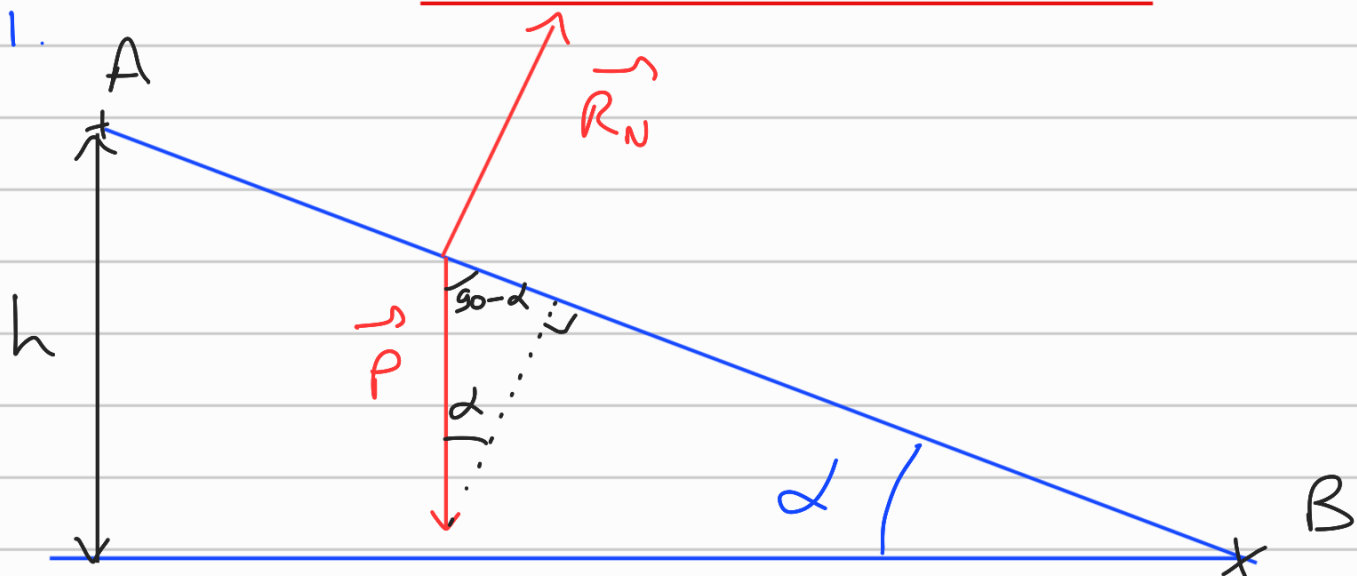


# Entraînement NECA

Q1.



On étudie le système {passager} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques sur le système :

- \* Poids  $\vec{P}$
- \* Réaction du support  $\vec{R}_N$  (orthogonale au support car frottements négligés)

PFD appliqué au système {passager} de masse constante, dans  $R_T$  supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$$

On utilise le système de coordonnées cartésiennes avec l'axe  $(Ox)$  dans la direction du toboggan et  $O$  au départ :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \cos \alpha + R_N \end{cases}$$

Par intégrations successives on a :

$$\dot{x} = g \sin \alpha t + \dot{x}(0) \quad \text{avec } \dot{x}(0) = 0$$

(départ sans vitesse initiale)

$$x(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + x(0) \quad \text{avec } x(0) = 0$$

car 0 est l'origine du repère.

$$\text{Or } \sin \alpha = \frac{h}{x_B - x_0} \Rightarrow x_B = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Le temps de passage en B ( $t_B$ ) vérifie donc :

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_B^2 \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}}$$

Sa vitesse est donc :

$$\dot{x}_B = g \sin \alpha \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}}$$

Soit

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

$$\text{AN: } v_B = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 33} = 25,4 \text{ m.s}^{-1} = \underline{\underline{91,6 \text{ km/h}}}$$

Q2. On applique le PFD au système en tenant compte des frottements :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

En projetant on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

le mouvement a lieu selon Ox donc  $z = \text{cte}$  d'où  $\ddot{z} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$$

Q3. Graphiquement, on lit  $\mu = 0,24$  (utilisation d'une échelle pour être plus précis).

Q4. le passager arrive en bas si  $v_B > 0$ .

On cherche donc une expression de  $v_B$  en fonction de  $\alpha$ .

D'après la loi de Coulomb  $T = \mu mg\cos\alpha$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

En intégrant 2 fois avec les conditions initiales précédentes on a :

$$x(t) = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t^2$$

$$\text{En B} \quad t_B = \sqrt{\frac{2x_B}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

$$\text{D'où} \quad v_B = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sqrt{\frac{2x_B}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

$$\text{avec} \quad x_B = \frac{h}{\sin \alpha}$$

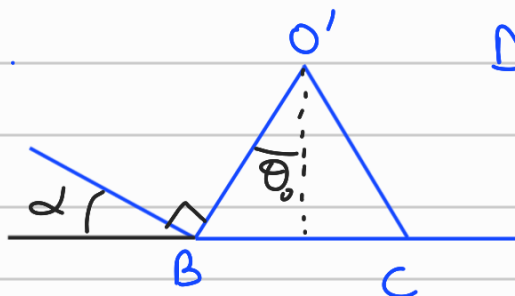
$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)}$$

le passager arrive en bas si  $v_B \geq 0$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\mu}{\tan \alpha} > 0 \Rightarrow \tan \alpha > \mu$$

Il faut donc  $\alpha > \arctan \mu$  AN :  $\alpha_{\min} = \underline{13^\circ}$

Q5.



Dans  $\triangle O'BC$  isocèle  $\widehat{CBO'} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\Rightarrow \widehat{O'CB} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \theta_0}$$

Q6. Bilan des forces sur  $\Pi$  :  $\vec{P} = m\vec{g}$   
 $\vec{R} = -R\vec{u}_r$

avec  $R > 0$

On applique le PFD au système  $\{\Pi\}$  dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

le mouvement est circulaire de rayon  $l$

$$\Rightarrow \vec{ON} = l\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Dans la base polaire  $\vec{P} = mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta$

D'où le système :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R \\ ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

Avec la projection sur  $\vec{u}_\theta$  on obtient l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Q7. Pour  $\theta < 1$  rad.  $\sin\theta \approx \theta$  et on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

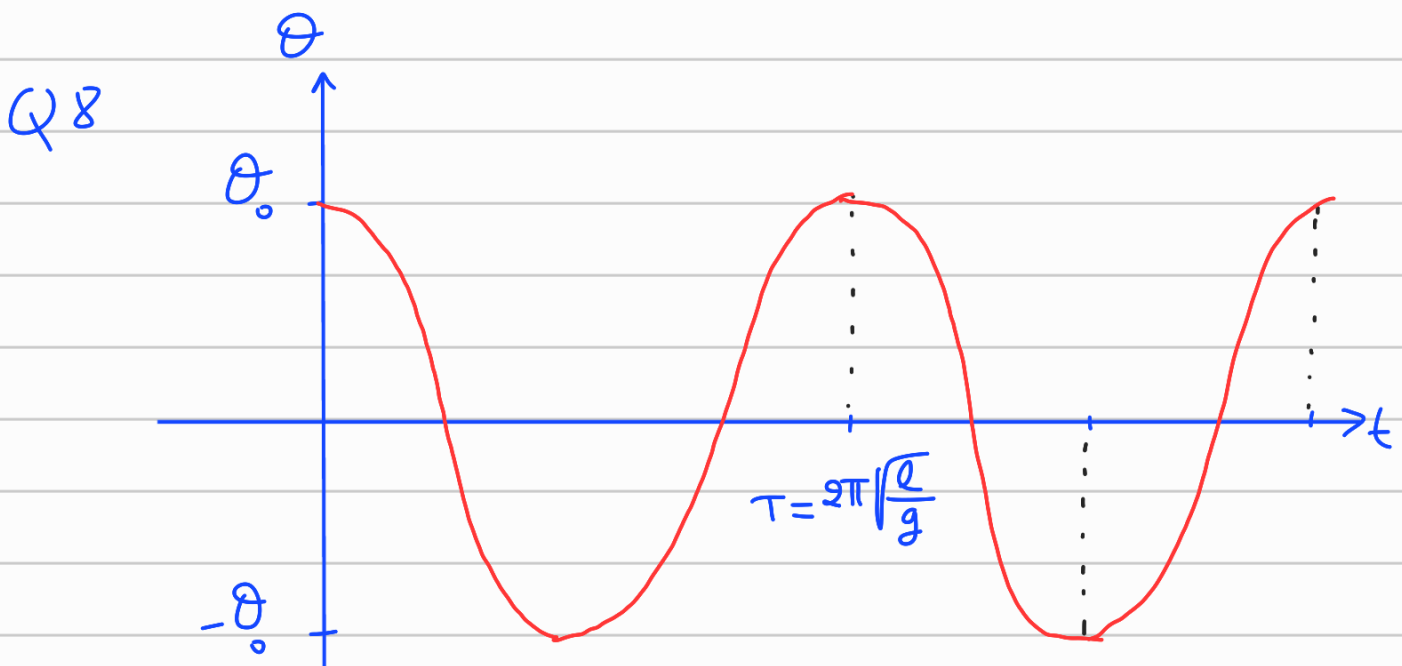
On détermine A et B avec les conditions initiales :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\theta_0 = A$$

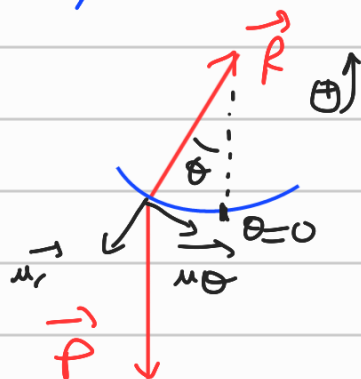
$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\dot{\theta}(0) = B \omega_0 = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



Q9. Sur la partie BC le mouvement est circulaire, donc  $\vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$



Bilan des forces :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta$   
 $\vec{R} = R\vec{u}_r$

le PFD appliqué au système dans  $R_T$  galiléen et projeté selon  $\vec{u}_\theta$  donne :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

Soit  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

que l'on peut intégrer entre B et C

$$\int_B^C \ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} dt = \int_B^C -\frac{g}{l}\sin\theta \cdot \dot{\theta} dt$$

$$\int_B^C \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) dt = \int_B^C -\frac{g}{l} \frac{d}{dt} (\cos\theta) dt$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}_C^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_B^2 = \frac{g}{l} \underbrace{(\cos\theta_C - \cos\theta_B)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_B = \dot{\theta}_C \quad \text{donc} \quad \boxed{v_B = v_C} \quad (v = l\dot{\theta})$$

Q10. Après le point C, le système a un mouvement de chute libre avec une vitesse initiale non nulle, telle que  $\vec{v}_C = v_C \cos\alpha \vec{u}_x' + v_C \sin\alpha \vec{u}_y'$

On utilise une base cartésienne attachée au repère  $(C'x'y'z')$  avec  $\vec{u}_x'$  le vecteur unitaire d'un axe horizontal et  $\vec{u}_y'$  le vecteur unitaire d'un axe vertical ascendant.

On a donc  $m\vec{a} = m\vec{g}$

avec  $\vec{a} \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}$  et  $\vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 0 \\ \ddot{y}' = -\frac{g}{m} \\ \ddot{z}' = 0 \end{cases}$$

En intégrant et en tenant compte de la vitesse en C (position où est prise l'origine des temps)

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = v_c \cos \alpha \\ \dot{y}'(t) = -\frac{g}{m} t + v_c \sin \alpha \\ \dot{z}'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = v_c \cos \alpha t \\ y'(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_c \sin \alpha t + y_c \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

On résoud  $y'(t) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + v_c \sin \alpha t + y_c = 0$

$$\Delta = v_c^2 \sin^2 \alpha + 4 \cdot \frac{1}{2} g y_c = v_c^2 \sin^2 \alpha + 2 g y_c$$

$$t_+ = \left( v_c \sin \alpha + \sqrt{v_c^2 \sin^2 \alpha + 2 g y_c} \right) \frac{2}{g} \quad (\text{racine positive})$$

$$d = v_c \cos \alpha \left( v_c \sin \alpha + \sqrt{v_c^2 \sin^2 \alpha + 2 g y_c} \right) \frac{1}{g}$$



$$\alpha = \pi/4 \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_c = 25,4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$g = 9,81$$

$$\Rightarrow d = \frac{25,4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{9,81} \left( \frac{25,4}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{25,4^2}{2} + 2 \cdot 9,81 \cdot 1} \right)$$

$$d = \underline{66,8 \text{ m}}$$

la distance réelle serait très inférieure à cause des frottements.