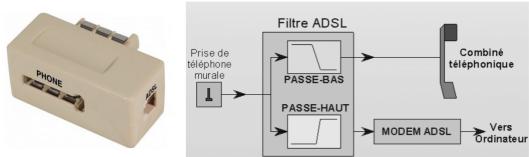


EL3 : Filtrage linéaire

Les signaux reçus sont souvent la superposition d'un ensemble de signaux :



- les signaux utiles, par ex signal téléphonique + signal informatique en entrée d'une prise ADSL ;
- les signaux parasites appelés « bruits » générés par l'environnement ;

et il est souvent nécessaire d'en extraire un parmi tous : c'est le but des filtres.

Plan du cours

| | | | |
|---|----------|--|-----------|
| I Signaux périodiques | 2 | II.5 Bande passante | 9 |
| I.1 Caractéristiques d'un signal périodique | 2 | III Étude de différents filtres | 10 |
| I.2 Mesures au multimètre | 3 | III.1 Méthode pour l'étude des filtres | 10 |
| I.3 Développement en série de Fourier | 3 | III.2 Filtre passe-bas du 1 ^{er} ordre | 11 |
| I.4 Analyse spectrale | 4 | III.3 Filtre passe-haut du 1 ^{er} ordre | 14 |
| I.5 Signaux complexes | 5 | III.4 Filtre passe-bas d'ordre 2 | 17 |
| II Filtrage | 6 | III.5 Filtre passe-bande d'ordre 2 | 20 |
| II.1 Opération de filtrage | 6 | IV Choix et utilisation de filtres | 23 |
| II.2 Filtre linéaire | 6 | IV.1 Gabarit d'un filtre | 23 |
| II.3 Fonction de transfert harmonique | 7 | IV.2 Dérivateur, intégrateur, moyenneur | 23 |
| II.4 Diagramme de Bode | 8 | IV.3 Réponse d'un filtre à une excitation | 23 |
| | | IV.4 Filtres en cascade | 25 |

À savoir par ❤️

- ✓ Signaux périodiques : définition de la valeur moyenne et de la valeur efficace.
- ✓ Expression générale de la fonction de transfert harmonique d'un filtre.
- ✓ Grandeurs représentées sur un diagramme de Bode (amplitude et phase)
- ✓ Savoir que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques

À savoir faire ✎

- ✓ Déterminer par calcul la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.
- ✓ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- ✓ Utiliser les échelles logarithmiques pour tracer les fonctions de transfert.
- ✓ Interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.
- ✓ Choisir un modèle de filtre en fonction du cahier des charges.
- ✓ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
- ✓ Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.

I Signaux périodiques

I.1 Caractéristiques d'un signal périodique

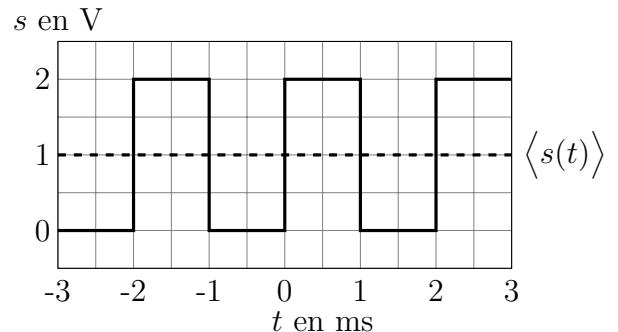
♥ Définition

Valeur moyenne d'un signal périodique $s(t)$ de période T : On la note $\langle s(t) \rangle$, elle vaut :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

💡 Remarque

Pour déterminer la valeur moyenne sur une représentation graphique du signal $s(t)$, on prend l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses sur une période puis on divise par la valeur de la période T pour que le résultat soit homogène.



♥ Définition

Valeur efficace d'un signal périodique $s(t)$ de période T : On la note S_{eff} , elle est définie par :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (s(t))^2 dt}$$

C'est la racine de la valeur moyenne du carré de s .

💣 Exercice de cours A

- Q1. Déterminer la valeur moyenne du signal $i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.
- Q2. Déterminer sa valeur efficace.
- Q3. En déduire la valeur moyenne et la valeur efficace de $u(t) = A_0 + A \sin(\omega t)$.



Remarques

- La valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal de valeur moyenne nulle est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$.
- La valeur efficace d'un signal triangulaire centré sur 0 d'amplitude S_m vaut : $S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{3}}$
- La valeur efficace d'un signal créneau centré sur 0 d'amplitude S_m vaut : $S_{\text{eff}} = S_m$
- La valeur de la tension notée sur les appareils électriques domestiques est donnée en valeur efficace d'une tension sinusoïdale. En France, on utilise majoritairement une tension $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$ ce qui correspond à une amplitude $U_m = 325 \text{ V}$.

I.2 Mesures au multimètre

| Mode | Grandeur mesurée | Pour $u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$ |
|---------|---|---|
| DC | Valeur moyenne (composante continue) | $U_{\text{DC}} = U_0$ |
| AC | Valeur efficace de la partie variable du signal | $U_{\text{AC}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ |
| AC + DC | Valeur efficace du signal complet | $U_{\text{AC+DC}} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_m^2}{2}}$ |

I.3 Développement en série de Fourier



Propriété

Développement en série de Fourier d'un signal périodique :

Un signal y périodique de période T et de fréquence f peut s'écrire comme la somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence f du signal $y(t)$.

Le **développement en série de Fourier** de y s'écrit :

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

- avec :
- | | |
|-------------|--|
| A_0 | = composante continue, c'est la moyenne du signal |
| f | = fréquence de $y(t)$, également la fréquence du fondamental f_1 ($n = 1$) |
| f_n | = nf = fréquence de l' harmonique de rang n |
| A_n | = amplitude de l'harmonique d'ordre n |
| φ_n | = la phase à l'origine des temps de l'harmonique d'ordre n |



Remarque

La valeur efficace Y_{eff} d'un signal y périodique de période T dont le développement de Fourier est donné par $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$, dont la $n^{\text{ième}}$ harmonique $y_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ est de valeur efficace $Y_{n,\text{eff}} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$ est telle que :

$$Y_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{eff}}^2$$

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

I.4 Analyse spectrale

L'analyse spectrale est l'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné. En TP, on verra comment réaliser une telle opération avec l'oscilloscope ou un logiciel de traitement de données (regressi, latispro).

L'analyse spectrale permet de connaître :

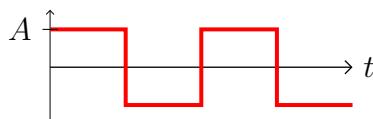
- les fréquences f_n des composantes sinusoïdales contenues dans le signal
- l'amplitude A_n de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n
- la phase à l'origine de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n

♥ Définition

Spectre en amplitude : il représente les amplitudes A_n en fonction des fréquences f_n (ou des pulsations $\omega_n = 2\pi \times f_n$), ce qui permet de voir l'importance relative des différents harmoniques présents dans le signal.

Le spectre en amplitude se représente sous la forme de barres verticales de hauteur A_n et d'abscisse f_n .

Exemple :



Le développement en série de Fourier pour le signal carré d'amplitude A est donné par :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t)$$

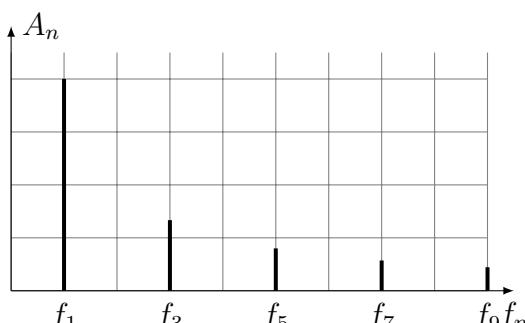
Ce signal ne se décompose donc qu'avec des harmoniques impairs :

f_1 d'amplitude $A_1 = \frac{4A}{\pi}$,

f_3 d'amplitude $A_3 = \frac{4A}{3\pi}$,

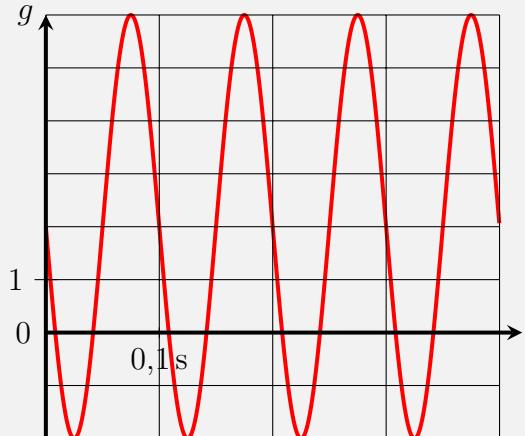
f_5 d'amplitude $A_5 = \frac{4A}{5\pi}$,

etc.

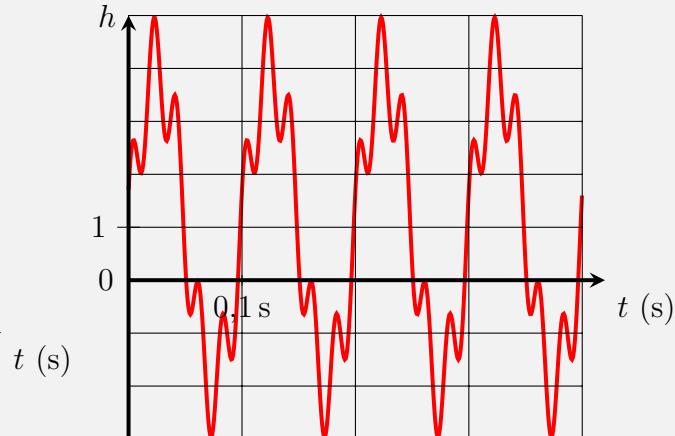


💣 Exercice de cours ⑭

$$g(t) = 2 + 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$h(t) = 1 + 3 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\omega t) + \cos\left(5\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$



Pour chacun des deux signaux représentés ci-dessus :

- Q1. Déterminer la période, en déduire leur fréquence et leur pulsation.
- Q2. Déterminer les valeurs des amplitudes A_n , des phases à l'origine des temps φ_n et des pulsations ω_n des différents harmoniques.
- Q3. Représenter les spectres en amplitude.

I.5 Signaux complexes

L'étude d'un filtre linéaire est menée en régime sinusoïdal, en utilisant la notation complexe :

- À la composante de pulsation ω du signal d'entrée $u_e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$, on associe le signal complexe :

$$\underline{u}_e(t) = \underline{U}_{em} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{U}_{em} = U_{em} e^{j\varphi_e}$$

- À la composante de pulsation ω du signal de sortie $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$, on associe le signal complexe :

$$\underline{u}_s(t) = \underline{U}_{sm} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{U}_{sm} = U_{sm} e^{j\varphi_s}$$

II Filtrage

II.1 Opération de filtrage



Un filtre est un quadripôle qui agit sur un signal d'entrée $e(t)$ pour générer un signal de sortie $s(t)$. $u_s(t)$ dépend de $u_e(t)$, de la nature du filtre et du circuit aval. Pour s'affranchir de l'influence du circuit aval, on s'intéresse le plus souvent à la situation en sortie ouverte ($i_s = 0$).

Un filtre ne transmet que les signaux dont les fréquences appartiennent à une certaine plage appelée à **bande passante** (\rightarrow II.5). Dans la pratique, les signaux dont la fréquence est en dehors de la bande passante doivent être suffisamment atténusés pour pouvoir être négligés.

Application directe : filtre RC série (sortie u_C)

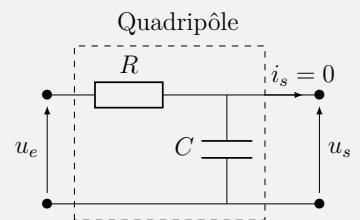
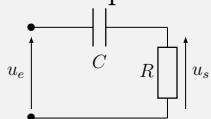
En entrée : $u_e(t)$ = tension aux bornes de l'association (RC) série

En sortie : $u_s(t)$ = tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$

Ce filtre transmet-il ou bloque-t-il les hautes fréquences (HF) ?

Et les basses fréquences (BF) ?

Ce comportement est-il modifié si on inverse les deux dipôles ?



♥ Définitions

Selon les fréquences des signaux transmis par un filtre, on définit :

- un filtre **passe-bas** : transmet les signaux BF et coupe les signaux HF ;
- un filtre **passe-haut** : coupe les signaux BF et transmet les signaux HF ;
- un filtre **passe-bande** : coupe les signaux BF et les signaux HF et transmet des signaux de fréquence intermédiaire (autour d'une certaine fréquence).
- un filtre **coupe-bande** (ou réjecteur) : transmet les signaux BF et les signaux HF et coupe des signaux de fréquence intermédiaire (autour d'une certaine fréquence).



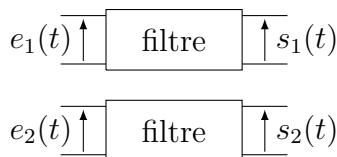
Remarque

« Les termes « BF » (basse fréquence) et « HF » (haute fréquence) n'ont de sens que par comparaison de la fréquence du signal d'entrée avec une fréquence caractéristique du circuit.

II.2 Filtre linéaire

♥ Définition

Filtre linéaire : Un filtre est linéaire si le principe de superposition s'applique : si $s_1(t)$ est la réponse du filtre à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse du filtre à $e_2(t)$ alors : $[\alpha.s_1(t) + \beta.s_2(t)]$ est la réponse du filtre à $[\alpha.e_1(t) + \beta.e_2(t)]$.



$$e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \quad \text{filtre} \quad s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$$



Un filtre linéaire :

- ne contient que des composants linéaires ;
- est un système régi par une équation différentielle linéaire entre le signal d'entrée $e(t)$ (= signal d'origine) et le signal de sortie $s(t)$ (= signal filtré) ;
- renvoie un signal de sortie de même pulsation ω que le signal sinusoïdal envoyé en entrée.

Remarques

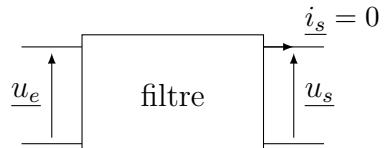
- Un filtre ne permettant d'amplifier (au sens de la puissance) aucune composante spectrale sera appelé **filtre passif** et à l'inverse, on parlera de **filtre actif**.
- Un filtre actif amène de l'énergie au système et nécessite donc une alimentation extérieure. Les filtres étudiés cette année seront obtenus par association de composants passifs (résistance, bobine, capacité) donc ils seront eux-mêmes passifs.

II.3 Fonction de transfert harmonique

Définition

Lorsque le signal d'entrée u_e est sinusoïdal de pulsation ω , le signal de sortie u_s l'est également et on définit la **fonction de transfert harmonique** du quadripôle (à vide : $i_s = 0$) par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

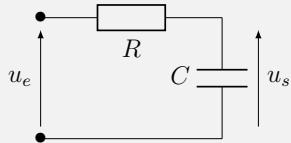


avec $\underline{u}_e = \underline{U}_{em} e^{j\omega t}$ et $\underline{u}_s = \underline{U}_{sm} e^{j\omega t}$, donc en simplifiant par $e^{j\omega t}$, \underline{H} peut s'écrire comme la fonction complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}} = \frac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

- de module $|\underline{H}(j\omega)|$, appelé **gain**, noté G , sans dimension : $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}}$
 - d'argument $\phi(\omega)$, appelé **phase**, noté ϕ , en radians : $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$
- c'est le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée.

Application directe : filtre RC série (sortie u_C)



Définir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre RC série avec la sortie prise aux bornes de u_C .

Que peut-on dire du courant traversant les deux dipôles ? En déduire un outil pratique pour évaluer $\underline{H}(j\omega)$, et l'appliquer.

Définition

Ordre d'un filtre : On admet que toute fonction de transfert \underline{H} peut se mettre sous la forme d'une fraction irréductible de deux polynômes, \underline{N} et \underline{D} , de variable $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$$

L'**ordre du filtre** correspond au degré de \underline{D} .

Application directe : filtre RC série (sortie u_C)

Quel est l'ordre du filtre RC série avec sortie aux bornes de C ?

Remarques

- La fonction de transfert peut s'écrire : $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\phi(\omega)}$.
- On a donc $U_{sm}e^{j(\omega t + \varphi_s)} = G(\omega) \times U_{em}e^{j(\omega t + \phi(\omega) + \varphi_e)}$.
- Le filtre transforme donc le signal d'entrée $u_e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ en signal de sortie $u_s(t) = G(\omega)E_m \cos(\omega t + \phi(\omega) + \varphi_e)$

II.4 Diagramme de Bode

Définition

Diagramme de Bode : Le diagramme de Bode d'un filtre est la donnée de deux diagrammes :

- le **diagramme en gain** : on représente le gain en décibels G_{dB} de la fonction de transfert en fonction de la pulsation ω (ou de la fréquence f), défini par :

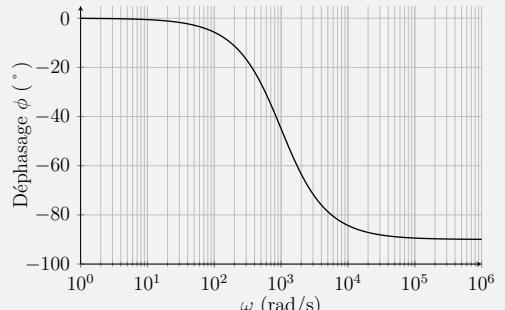
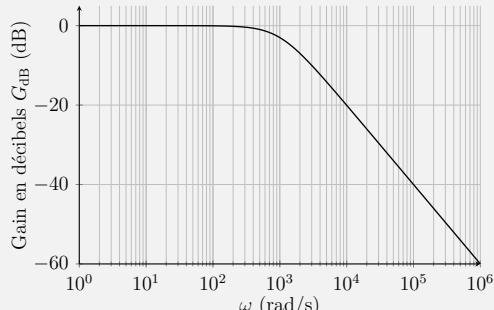
$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$$

- le **diagramme en phase** : on représente l'argument de la fonction de transfert ϕ en fonction de la pulsation ω (ou de la fréquence f), défini par :

$$\phi = \arg(\underline{H})$$

Pour ces deux diagrammes l'axe des abscisses (ω ou f) est en **en échelle logarithmique**.

Application directe : Diagrammes de Bode du filtre RC série (sortie u_C)



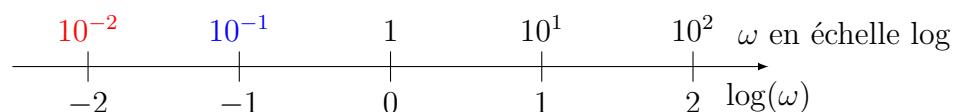
Justifier la nature passe-bas de ce filtre avec le diagramme de Bode.

Qualifier le déphasage de u_s par rapport à u_e à basse et à haute fréquence.

Méthode : échelle logarithmique

Dans les diagrammes de Bode, en abscisse, la pulsation est représentée à l'aide d'une **échelle logarithmique** : la pulsation est multipliée par 10 en passant d'une graduation à une autre.

On utilise l'échelle logarithmique, car on peut représenter des variations de ω bien plus importantes qu'en échelle linéaire (un changement d'un ordre de grandeur en ω correspond seulement à un changement d'une unité en $\log(\omega)$).



❤ Définition

Décade : Chaque intervalle de pulsation $[10^n, 10^{n+1}]$ est appelé **décade**.

💡 Remarques

- Chaque décade occupe la même « place » en échelle logarithmique. Sur une échelle logarithmique, il y a la même précision entre 10 et 100 Hz qu'entre 10^4 et 10^5 Hz.
- On peut aussi tracer le diagramme de Bode en utilisant une abscisse adimensionnée $\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$, où $\omega_{\text{réf}}$ est une pulsation de référence.

📌 Application directe

Si sur l'échelle logarithmique ci-dessous, 1×10^{-1} Hz est la fréquence minimale lue, placer les fréquences suivantes : 2×10^{-1} Hz ; 50 Hz ; 8 Hz ; 200 Hz ; 1,2 Hz.



II.5 Bande passante

❤ Définition

Bandé passante : La bande passante à -3dB est l'intervalle de pulsations tel que :

$$G(\omega) > \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega) > G_{\text{dB,max}} - 3\text{dB}$$

car $20 \log(\sqrt{2}) \approx 3\text{dB}$

On définit la (ou les) **pulsation(s) de coupure** notée ω_c par la relation :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3\text{dB}$$

📌 Application directe : Diagrammes de Bode du filtre RC série (sortie u_C)

Déterminer grâce au diagramme de Bode fourni précédemment la bande passante du filtre RC série avec sortie aux bornes de C .

III Étude de différents filtres

III.1 Méthode pour l'étude des filtres

★ Méthode : Déterminer la nature d'un filtre sans calcul

Étude à basse fréquence :

- ① Représenter le circuit en remplaçant les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines par des fils.
- ② En déduire les intensités qui sont nulles (celles qui traversent les branches contenant un interrupteur ouvert) et les tensions qui sont nulles (celles aux bornes d'un fil).
- ③ Exprimer u_s en fonction de u_e et de résistances éventuelles présentes dans le circuit. Pour cela, un pont diviseur de tension ou de courant suffit en général.

Étude à haute fréquence :

Reprendre les mêmes étapes qu'à basse fréquence (avec les équivalences HF cette fois : condensateurs \leftrightarrow fils et bobines \leftrightarrow interrupteurs ouverts)

Conclusion :

- Si $u_s = f(u_e) \neq 0$ à BF et $u_s = 0$ à HF : c'est un filtre passe-bas
- Si $u_s = 0$ à BF et $u_s = f(u_e) \neq 0$ à HF : c'est un filtre passe-haut
- Si $u_s = 0$ à BF et $u_s = 0$ à HF : c'est un filtre passe-bande

★ Méthode : Établir la fonction de transfert

Quand le filtre est à vide ($i_s = 0$), on établit la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ en faisant un **pont diviseur de tension**.

💡 Remarques

- Il est parfois nécessaire de procéder à des associations d'impédances au préalable.
- Après avoir déterminé la fonction de transfert, on l'identifie souvent à la forme canonique d'un type de filtre (pour alléger/simplifier les calculs). Voici ces formes canoniques (elles seront fournies) avec $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}$ (pulsation réduite) et $H_0 = \text{gain en statique}$.

- Passe-bas du 1^{er} ordre : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$
- Passe-haut du 1^{er} ordre : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$
- Passe-bas du 2^e ordre : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$
- Passe-haut du 2^e ordre : $\underline{H}(jx) = \frac{-x^2 H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$
- Passe-bande du 2^e ordre : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$
- Réjecteur de bande du 2^e ordre : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0(1 - x^2)}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

★ Méthode : Déterminer la bande passante par le calcul

- ① Utiliser l'expression du gain (et non du gain en décibels) ;
- ② Déterminer l'expression du gain maximal G_{\max} (pas en décibels) ;
- ③ Résoudre l'équation en ω_c : $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.

III.2 Filtre passe-bas du 1^{er} ordre

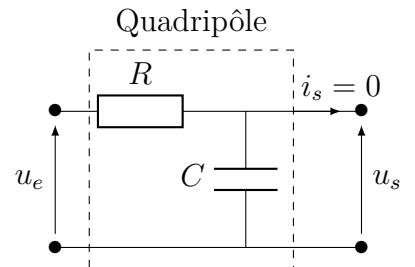
Exemple : On étudie le quadripôle constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C , alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$.

On le considère en sortie ouverte ($i_s = 0$), ce qui est le cas lorsqu'on branche un oscilloscope en sortie dont la résistance d'entrée $R_e = 1 \text{ M}\Omega \gg R$, $\frac{1}{C\omega}$.

a) Étude qualitative

Application directe

Vérifier sans calcul que le quadripôle représenté ci-dessous est un filtre passe-bas.



b) Fonction de transfert

Application directe

À l'aide de la relation du pont diviseur de tension, déterminer le lien entre u_s et u_e , et en déduire l'expression de la fonction de transfert.

📌 Application directe

La mettre sous la forme $H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ et identifier les expressions de H_0 et ω_c (et $\omega_c = \omega_{\text{ref}}$ de la forme canonique).

📌 Application directe

Donner l'ordre du filtre, et déterminer sa nature en étudiant le comportement aux limites de la fonction de transfert.

c) Gain et bande passante

📌 Application directe

Exprimer le gain $G(\omega)$ à partir de la fonction de transfert.

📌 Application directe

Quelle est la valeur maximale du gain ?

📌 Application directe

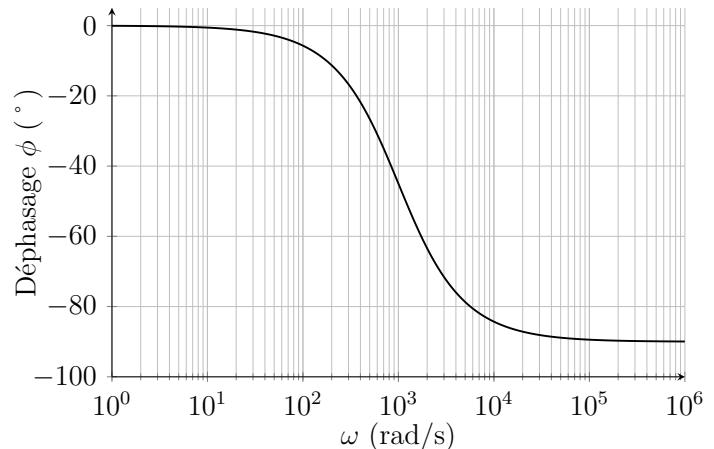
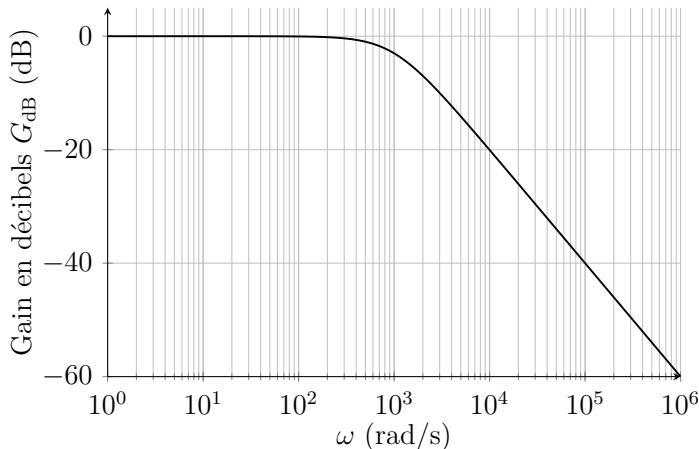
Après avoir rappelé la définition de la pulsation de coupure, établir son expression.

Application directe

En déduire l'expression de la largeur de la bande passante.

d) Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ est représenté ci-dessous :



Application directe

Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes.

Application directe

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à basse fréquence et en déduire les équations des asymptotes à basse fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

Application directe

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à haute fréquence et en déduire les équations des asymptotes à haute fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

Application directe

Déterminer graphiquement la bande passante.

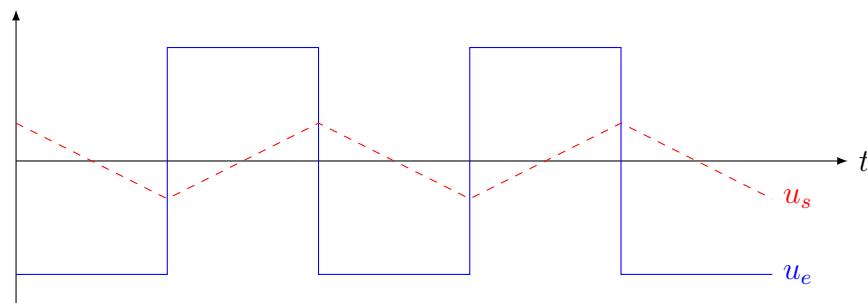
e) Comportements intégrateur à haute fréquence

En utilisant son approximation à haute fréquence (quand $\omega \gg \omega_c$, c'est à dire dans la zone de l'asymptote -20 dB/dec) $\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \approx H_0 \frac{\omega_c}{j\omega}$, le signal de sortie peut s'exprimer en fonction du signal d'entrée par :

$$u_s(t) = H_0 \omega_c \times \int u_e(t) dt$$

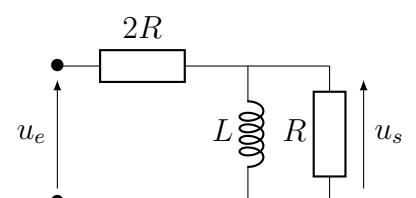
Un filtre passe-bas du premier ordre alimenté par un signal de fréquence très grande devant la fréquence de coupure réalise donc une intégration du signal d'entrée.

Exemple : Quand on alimente un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz avec un signal créneau de fréquence 1 kHz, on observe une intégration du signal en sortie :



III.3 Filtre passe-haut du 1^{er} ordre

Exemple : On étudie le quadripôle ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$. On le considère en sortie ouverte.



a) Étude qualitative du filtre

 **Application directe**

Par une étude qualitative du circuit, à basse et haute fréquences, déterminer la nature du filtre.

b) Fonction de transfert

 **Application directe**

Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre.

 **Application directe**

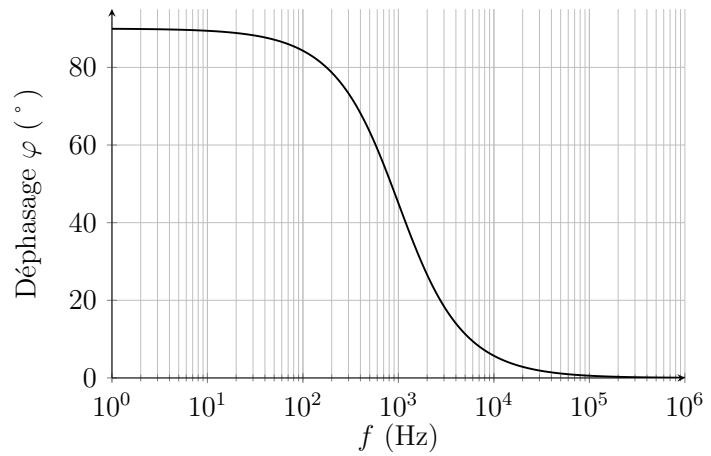
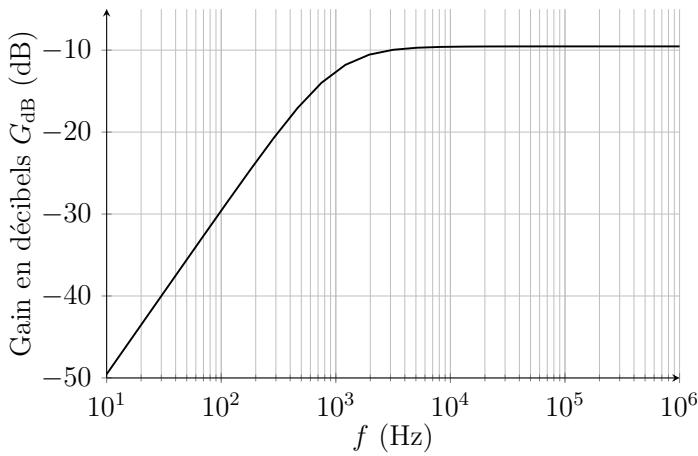
La mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{3} \times j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ et identifier les expressions de H_0 et ω_c .

Application directe

Donner l'ordre du filtre, et en identifiant le comportement aux limites de la fonction de transfert, identifier sa nature.

c) Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode du filtre précédent est représenté ci-dessous :



Application directe

Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes.

Application directe

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à basse fréquence et en déduire les équations des asymptotes à basse fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

Application directe

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à haute fréquence et en déduire les équations des asymptotes à haute fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

Application directe

Déterminer la bande passante.

d) Comportement dérivateur à basse fréquence

En utilisant son approximation à basse fréquence (quand $\omega \ll \omega_c$, c'est à dire dans la zone de l'asymptote +20 dB/dec) $\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \approx H_0 \times j \frac{\omega}{\omega_0}$, le signal de sortie peut s'exprimer en fonction du signal d'entrée par :

$$u_s(t) = \frac{H_0}{\omega_0} \times \frac{du_e(t)}{dt}$$

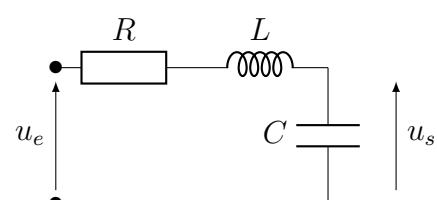
Un filtre passe-haut du premier ordre alimenté par un signal de fréquence très faible devant la fréquence de coupure réalise donc une dérivation du signal d'entrée.

III.4 Filtre passe-bas d'ordre 2

La forme canonique pour ce type de filtre est : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$, avec x la pulsation réduite $\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}$ et H_0 le gain statique.

Remarque

On reconnaît le résultat de l'étude de la résonance en charge dans un circuit RLC en RSF (\underline{u}_C aux bornes de C).



a) Étude qualitative**Application directe**

Par une étude qualitative du circuit, à basse et haute fréquences, déterminer la nature du filtre.

b) Fonction de transfert**Application directe**

Établir la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega)$.

Application directe

La mettre sous la forme $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$ et identifier les expressions de H_0 , Q et ω_0 .

c) Diagramme de Bode**Application directe**

Exprimer le gain $G(\omega)$ à partir de la fonction de transfert, puis le gain en décibels G_{dB} .

Application directe

Déterminer les équations des asymptotes BF et HF pour le diagramme en gain, ainsi que la pulsation à laquelle elles se coupent. Ces résultats dépendent-ils du facteur de qualité ?

Application directe

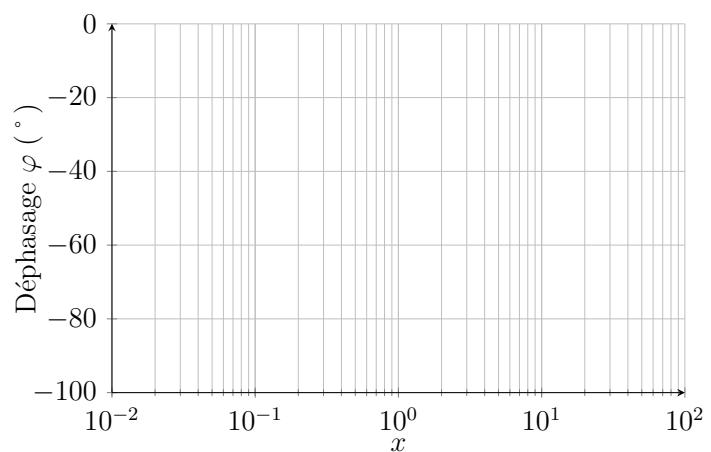
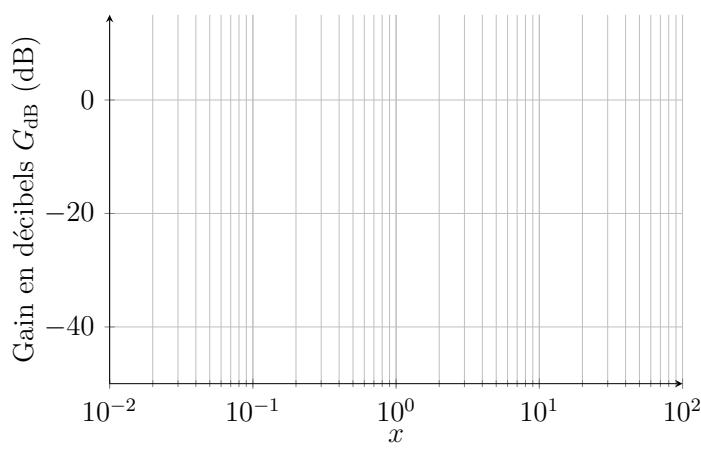
Montrer qualitativement que la bande passante peut être de la forme $[\omega_1; \omega_2]$ ou $[0; \omega_1]$ en fonction de la valeur de Q .

Application directe

Déterminer les équations des asymptotes BF et HF pour le diagramme en phase, ainsi que la phase pour $\omega = \omega_0$. Ces résultats dépendent-ils du facteur de qualité ?

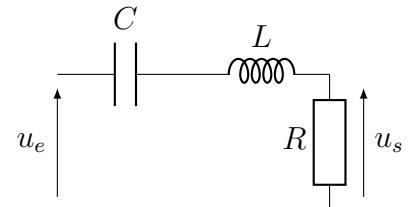
Application directe

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques en gain et en phase, avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ en abscisse (échelle log) et un gain en statique égal (H_0) à 1, pour 3 valeurs de $Q : 0,5 ; \sqrt{2} ; 4$.



III.5 Filtre passe-bande d'ordre 2

Exemple : On étudie la tension aux bornes de la résistance dans le circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ en sortie ouverte.



a) Étude qualitative

Application directe

Par une étude qualitative du circuit, à basse et haute fréquences, déterminer la nature du filtre.

b) Fonction de transfert

Application directe

Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre.

Application directe

La mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ et identifier les expressions de H_0 , Q et ω_0 .

c) Gain et bande passante

Application directe

Exprimer le gain $G(\omega)$ à partir de la fonction de transfert.

Application directe

Quelle est la valeur maximale du gain ? Pour quelle pulsation ?

Application directe

Poser le calcul permettant de déterminer les expressions des pulsations de coupure, et montrer que l'écart entre elles vérifie $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

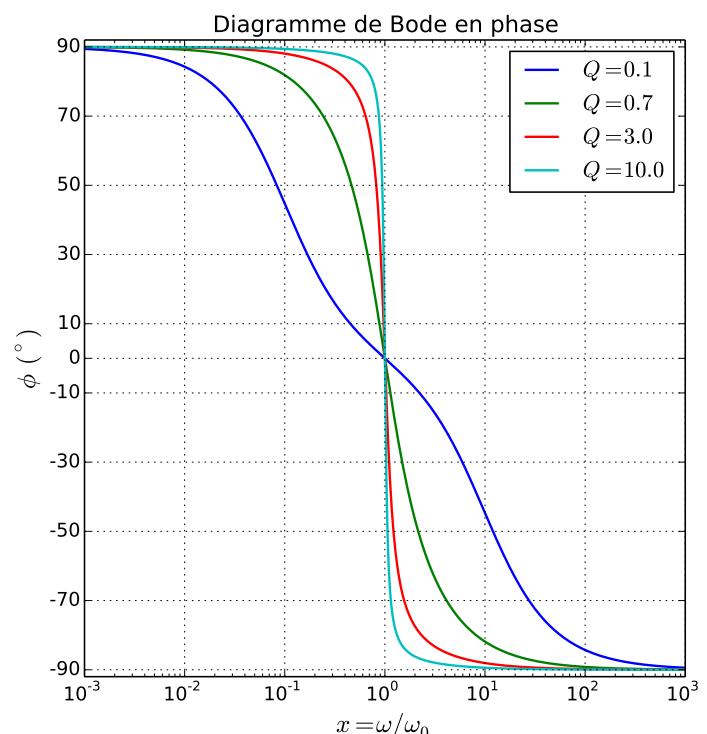
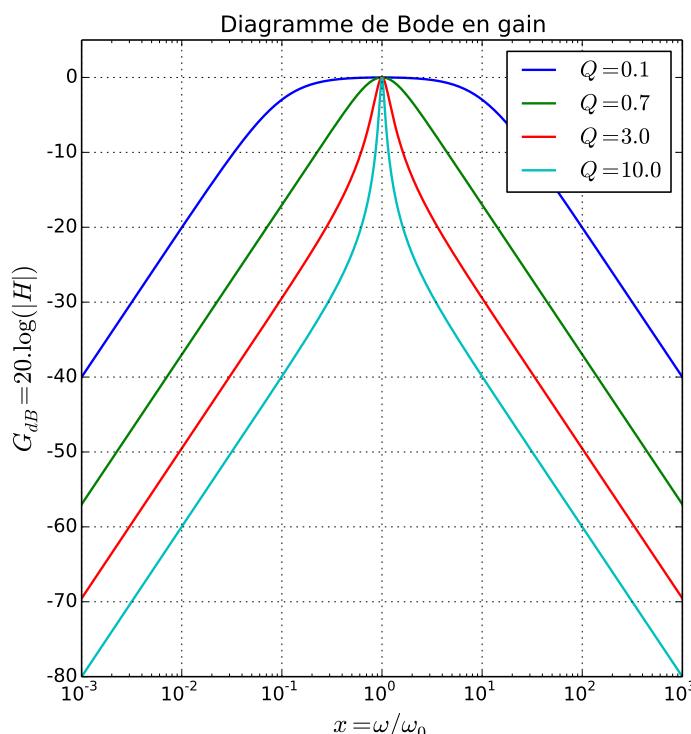
Propriété

Largeur de la bande passante du filtre passe-bande d'ordre 2 : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

avec : ω_0 = pulsation propre et Q = facteur de qualité, tels que : $H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$

d) Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode du filtre précédent est donné ci-dessous pour différentes valeurs de Q :



✍ Application directe

Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes. Dépendent-elles de Q ?

✍ Application directe

Vérifier que ces résultats sont cohérents avec la fonction de transfert établie précédemment.

✍ Application directe

Déterminer graphiquement la bande passante du filtre pour $Q = 0, 1$. Vérifier la cohérence avec la formule $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

✍ Application directe

Dans quels cas peut-on considérer qu'il est sélectif ?

❤ Résumé

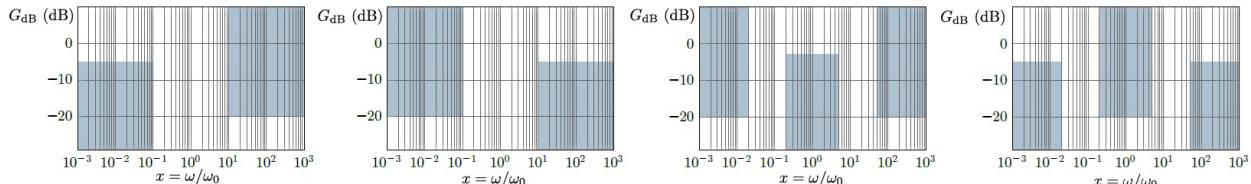
| Ordre du filtre | Pentes possibles des asymptotes | Résonance possible |
|-----------------|---------------------------------|--------------------|
| 1 | horizontale | non |
| | +20dB décade | |
| | -20dB décade | |
| 2 | +40dB décade | oui |
| | -40dB décade | |

IV Choix et utilisation de filtres

IV.1 Gabarit d'un filtre

❤ Définition

Gabarit d'un filtre : c'est le diagramme de Bode du filtre sur lequel apparaissent les zones de pulsations à laisser passer ou à atténuer (grisées). Le tracé du gain doit éviter les zones grisées.



a) Filtre passe-bas b) Filtre passe-haut c) Filtre passe-bande d) Filtre coupe-bande

IV.2 Utilisation en déivateur, intégrateur, moyenneur

❤ Propriétés

Comportement déivateur : Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente +20 dB/déc, alors il aura un comportement déivateur sur cette gamme de fréquence.

Comportement intégrateur : Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente -20 dB/déc, alors il aura un comportement intégrateur sur cette gamme de fréquence.

Comportement moyenneur : Un filtre passe-bas de fréquence de coupure très petite devant la fréquence du signal d'entrée aura un effet moyenneur.

IV.3 Réponse d'un filtre à une excitation

a) Réponse d'un filtre à un signal sinusoïdal

★ Méthode

Réponse d'un filtre à un signal sinusoïdal : Si le signal d'entrée est sinusoïdal de pulsation ω_1 s'écrivant $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega_1 t + \varphi_e)$, alors le signal de sortie sera un signal sinusoïdal de même pulsation ω_1 , s'écrivant $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega_1 t + \varphi_s)$, dont on peut en déterminer les caractéristiques, grâce à la connaissance de la fonction de transfert et/ou du diagramme de Bode :

- Amplitude du signal de sortie : $U_{sm} = G(\omega_1) \times U_{em} = |H(j\omega_1)| \times U_{em} = 10^{\frac{G_{dB}(\omega_1)}{20}} \times U_{em}$
- Phase à l'origine du signal de sortie : $\varphi_s = \varphi_e + \arg(H(j\omega_1))$

b) Réponse d'un filtre à une somme de signaux

★ Méthode

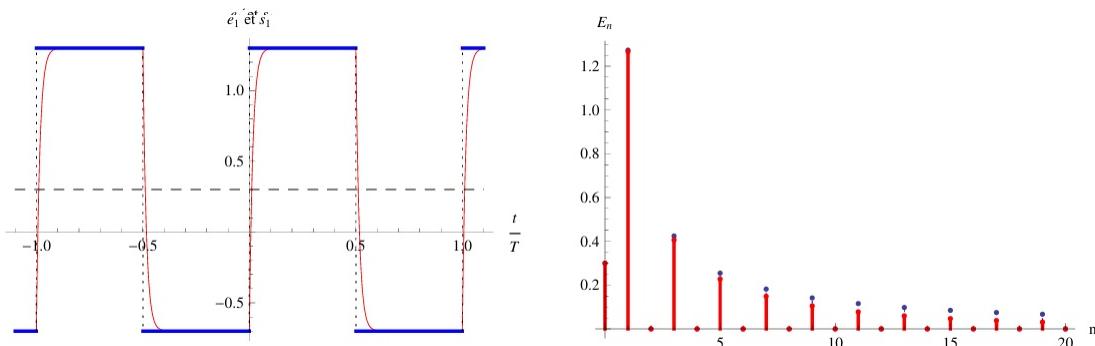
Pour déterminer la réponse à une somme finie de signaux sinusoïdaux ou à un signal périodique :

- ① Décomposer le signal d'entrée : $u_e(t) = \sum_n u_{en}(t) = \sum_n U_{en} \cos(\omega_n t + \varphi_{e,n})$
- ② Déterminer la réponse u_{sn} correspondant à chacune des composantes u_{en} grâce à la fonction de transfert harmonique du filtre (ou à son diagramme de Bode) :

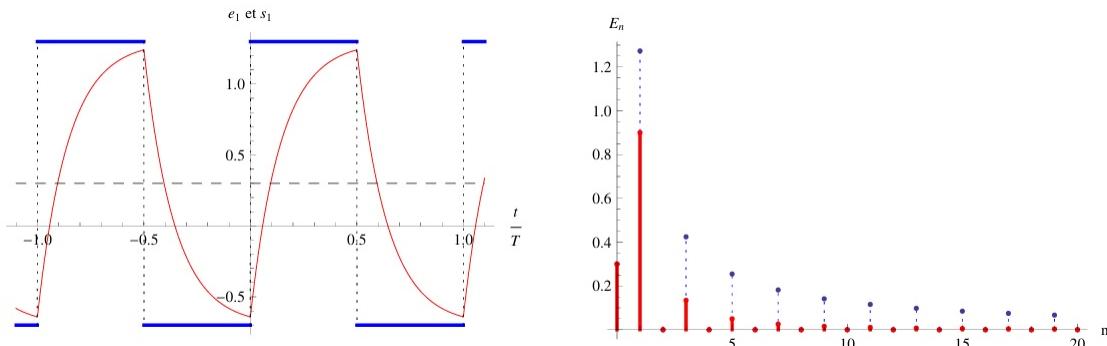
$$u_{sn}(t) = U_{sn} \cos(\omega_n t + \varphi_{s,n}), \text{ avec } U_{sn} = |H(j\omega_n)| \times U_{en} \text{ et } \varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \arg(H(j\omega_n))$$
- ③ Superposer les termes obtenus : $u_s(t) = \sum_n u_{sn}(t)$

Exemple : On envoie sur un filtre passe-bas d'ordre 1 ($H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$) un signal créneau de fréquence $2\pi\omega$, et on teste l'effet de la modification de la pulsation de coupure ω_c du filtre sur le signal récupéré en sortie :

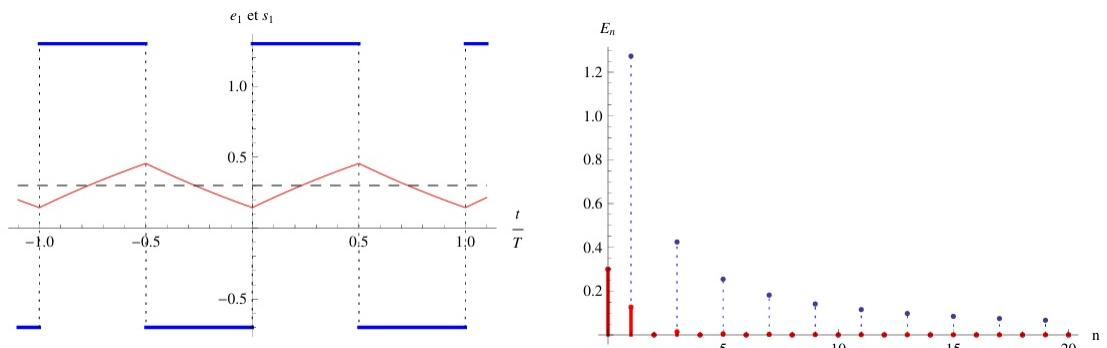
Pour $\omega_c = 10\omega$:



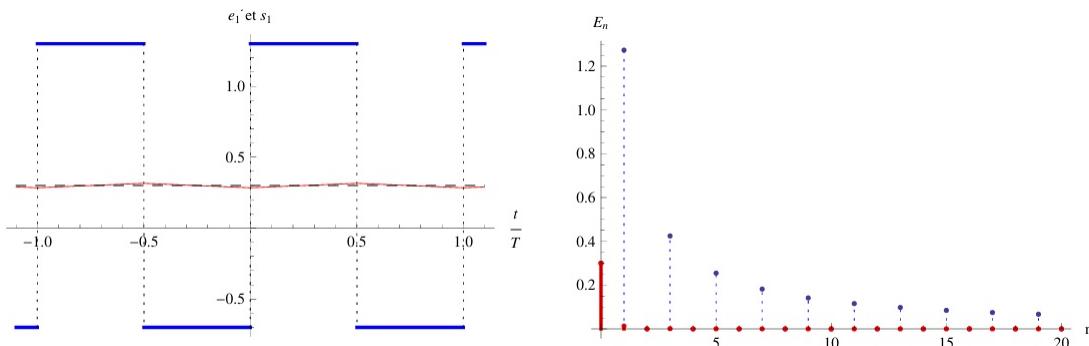
Pour $\omega_c = \omega$:



Pour $\omega_c = 0,1\omega$:



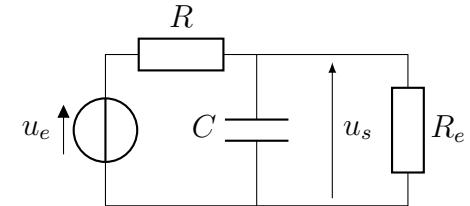
Pour $\omega_c = 0,01\omega$:



IV.4 Filtres en cascade

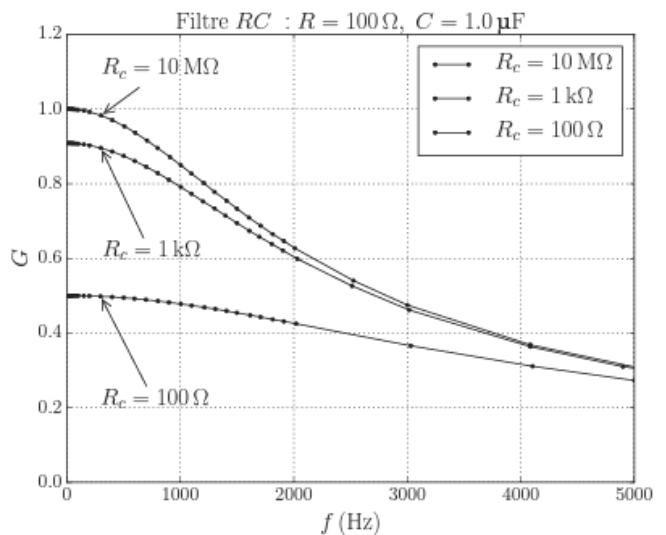
a) Présence d'une charge en sortie du filtre

Étudions l'effet de la présence d'une charge en sortie (moteur, appareil électronique, etc.) modélisable par une résistance R_e branchée aux bornes de la capacité.



La diminution de la résistance de charge abaisse le gain à basse fréquence (dans la bande passante) et augmente la fréquence de coupure. Le filtre est donc modifié par la présence d'une charge en sortie. Cela est dû au fait qu'une partie du courant traverse la charge.

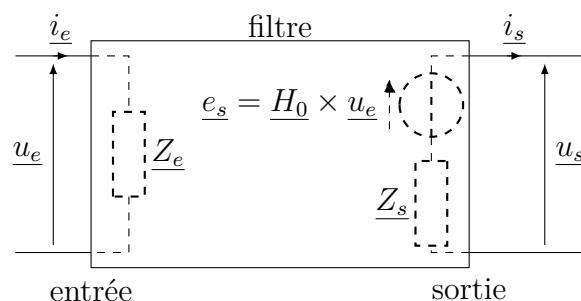
À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, et le filtre est alors constitué de deux résistances en série. La relation du pont diviseur de tension donne, alors $u_s = \frac{R_e}{R + R_e} u_e$. Ainsi, lorsque $R_e \gg R$, son effet sera négligeable sur le fonctionnement du filtre à basse fréquence.



Courbe du gain en fonction de la fréquence pour différentes résistances R_e

b) Impédances d'entrée et de sortie

L'action d'un filtre linéaire sur le reste du circuit peut être modélisée par :



- Vu depuis l'entrée, le filtre se comporte comme une impédance Z_e , appelée **impédance d'entrée du filtre**, définie par $Z_e = \frac{u_e}{i_e}$.

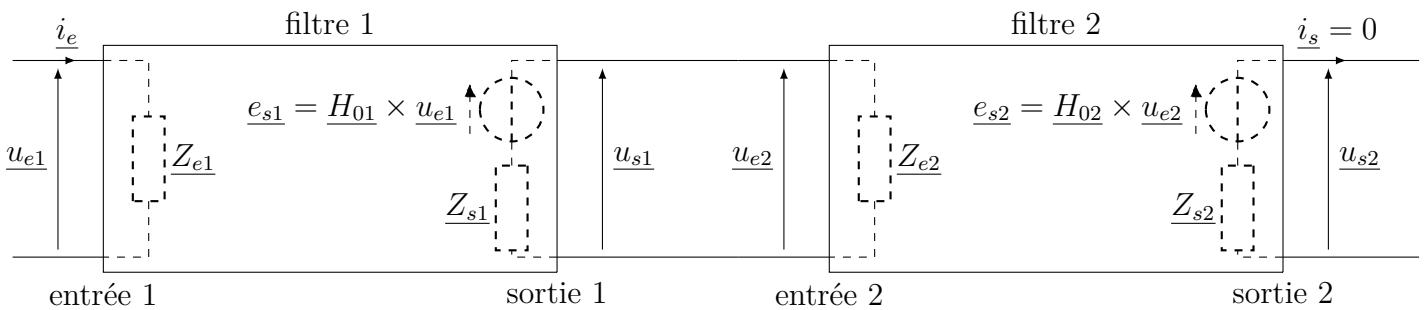
- En sortie, l'action du filtre sur ce qui se situe après est modélisée par un générateur réel de fem $e_s = \underline{H}_0 \times \underline{u}_e$ et d'impédance \underline{Z}_s , appelée **impédance de sortie du filtre**.

Lorsque le filtre est à vide (rien n'est branché en sortie, donc $i_s = 0$), alors $\underline{u}_s = e_s = \underline{H}_0 \times \underline{u}_e$, avec \underline{H}_0 la fonction de transfert du filtre non chargé.

Lorsque le filtre est chargé (quelque chose est branchée en sortie, donc $i_s \neq 0$), $\underline{u}_s = e_s - \underline{Z}_s \times i_s$, donc $\underline{u}_s = \underline{H}_0 \times \underline{u}_e - \underline{Z}_s i_s \neq \underline{H}_0 \times \underline{u}_e$.

Ainsi la fonction de transfert du filtre chargé $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \neq \underline{H}_0$: la fonction de transfert du filtre chargé est modifiée par la charge, donc le fonctionnement fréquentiel du filtre est modifié par la charge.

c) Mise en cascade de deux filtres



H_{01} et H_{02} sont les fonctions de transfert à vide des deux filtres (= lorsqu'ils ne sont pas chargés).

⚠ Le filtre 1 est chargé par la présence du filtre 2 donc $\frac{u_{s1}}{u_{e1}} \neq H_{01}$ (à vide).

$$\text{Fonction de transfert de l'ensemble des deux filtres : } \underline{H} = \frac{\underline{u}_{s2}}{\underline{u}_{e1}} = \underbrace{\frac{\underline{u}_{s2}}{\underline{u}_{e2}}}_{=H_{02}} \times \underbrace{\frac{\underline{u}_{e2}}{\underline{u}_{e1}}}_{\neq H_{01}}$$

Le filtre 2 n'est pas chargé, donc $\underline{u}_{s2} = e_{s2} = \underline{H}_2 \times \underline{u}_{e2}$

$$\text{Pour relier } \underline{u}_{e2} \text{ à } \underline{u}_{e1}, \text{ on réalise un pont diviseur de tension : } \underline{u}_{e2} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underbrace{\underline{e}_{s1}}_{=\underline{H}_{01} \times \underline{u}_{e1}}$$

$$\text{Ainsi } \underline{u}_{e2} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underline{H}_{01} \times \underline{u}_{e1}, \text{ donc } \underline{\frac{u_{e2}}{u_{e1}}} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underline{H}_{01}$$

La fonction de transfert de l'ensemble est donc : $\underline{H} = \underline{H}_{02} \times \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underline{H}_{01} \approx \underline{H}_{02} \times \underline{H}_{01}$ si $\frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \approx 1$ ce qui est vrai pour $|\underline{Z}_{e2}| \gg |\underline{Z}_{s1}|$



Propriétés

Mise en cascade de filtres :

- La présence d'un filtre en aval peut charger le filtre en amont, et modifier sa fonction de transfert, et donc son comportement fréquentiel.
- La fonction de transfert d'un filtre n'est pas modifiée lors de sa mise en cascade s'il présente une impédance d'entrée très grande, voire infinie, et une impédance de sortie très faible, voire nulle.
- La fonction de transfert d'une mise en cascade de filtres d'impédances d'entrée très grandes, voire infinies, et d'impédances de sortie très faibles, voire nulles, est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre.