

DS 5 correction

Exercice 1

Q1. a) les fréquences présentes sont $f_n = 2\pi\omega_n$ avec n impair.

b) l'harmonique qui contribue le plus au son produit est celui de rang 1 ($n=1$) de fréquence $\omega_1 = 1 \cdot \omega_0 = \frac{\pi c}{L}$

$$\Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{c}{2L}}$$

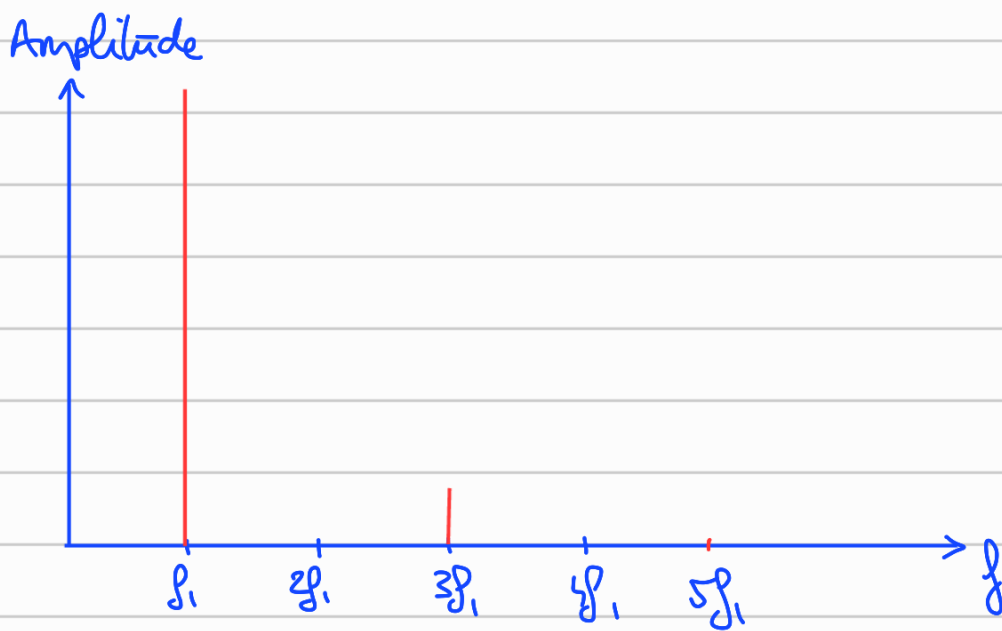
$$\text{AN: } f_1 = \sqrt{\frac{120}{60 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{1}{20,60} = 118 \text{ Hz}$$

(Amplitude $A_1 = A$)

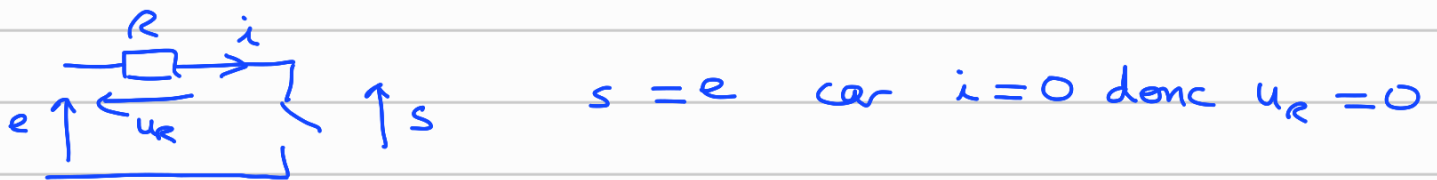
c) Harmonique d'ordre 3 : $f_3 = 3 \cdot f_1 = 354 \text{ Hz}$
Amplitude $A_3 = \frac{A}{2^3} = \frac{A}{8}$

Amplitude $A_5 = \frac{A}{5^3} = \frac{A}{125}$

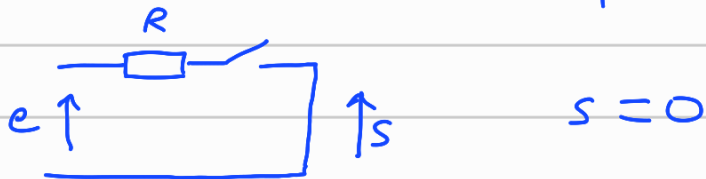
Au delà du rang 5 les amplitudes deviennent négligeables



Q2 * Comportement basse fréquence :
 bobine $\Leftrightarrow$ fil
 condensateur $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert



* Comportement haute fréquence :
 bobine $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert
 condensateur $\Leftrightarrow$ fil



$\Rightarrow$ filtre passe bas

Q3 . Par définition $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$

Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C} + 1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + RjC\omega + jL\omega \cdot jC\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Q4. Par identification :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \frac{1}{\omega_0^2} = LC \\ \frac{1}{Q\omega_0} = RC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Q5. Le phénomène de résonance correspond à un maximum de $|\underline{H}|$.
On détermine l'existence d'une résonance en étudiant les variations de $|\underline{H}|$ qui vaut :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

On pose $x = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}}}$

les variations de $|\underline{H}|$ se déduisent de celles de la fonction $f(x) = (1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}$

car $|\underline{H}|' = -\frac{1}{2} f'(x) \cdot f(x)^{-3/2}$.

$$f'(x) = -2(1-x) + \frac{1}{Q^2} = 2x - 2 + \frac{1}{Q^2}$$

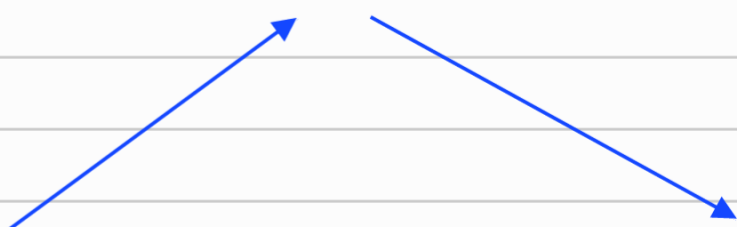
$$f'(x_r) = 0 \Leftrightarrow 2x_r = 2 - \frac{1}{Q^2}$$

$$x_r = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

$$\text{Or } x \geq 0 \Rightarrow x_r \text{ existe si } Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Signe de } f(x) : f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x < 1 - \frac{1}{2Q^2} \\ &\Leftrightarrow \omega < \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow x > 1 - \frac{1}{2Q^2} \\ &\Leftrightarrow \omega > \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned}$$

ω	ω_r		
$f'(x)$	-	0	+
$ H(\omega) '$	+	0	-
$ H(j\omega) $			

Q6. Diagramme de Bode en amplitude :

$$G_{dB} = 20 \log |H|$$

Comportements asymptotiques :

* Pour $\omega \ll \omega_0$ ($x \ll 1$) $\underline{H} \sim H_0 \Rightarrow G_{dB} \sim 20 \log H_0 = 0$

Il y a donc une asymptote horizontale à 0 dB à basse fréquence.

* Pour $\omega \gg \omega_0$ ($x \gg 1$) $\underline{H} \sim -\frac{H_0 \omega_0^2}{\omega^2}$

$$\Rightarrow G_{dB} \sim 20 \log(H_0) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

pente -40 dB/décade

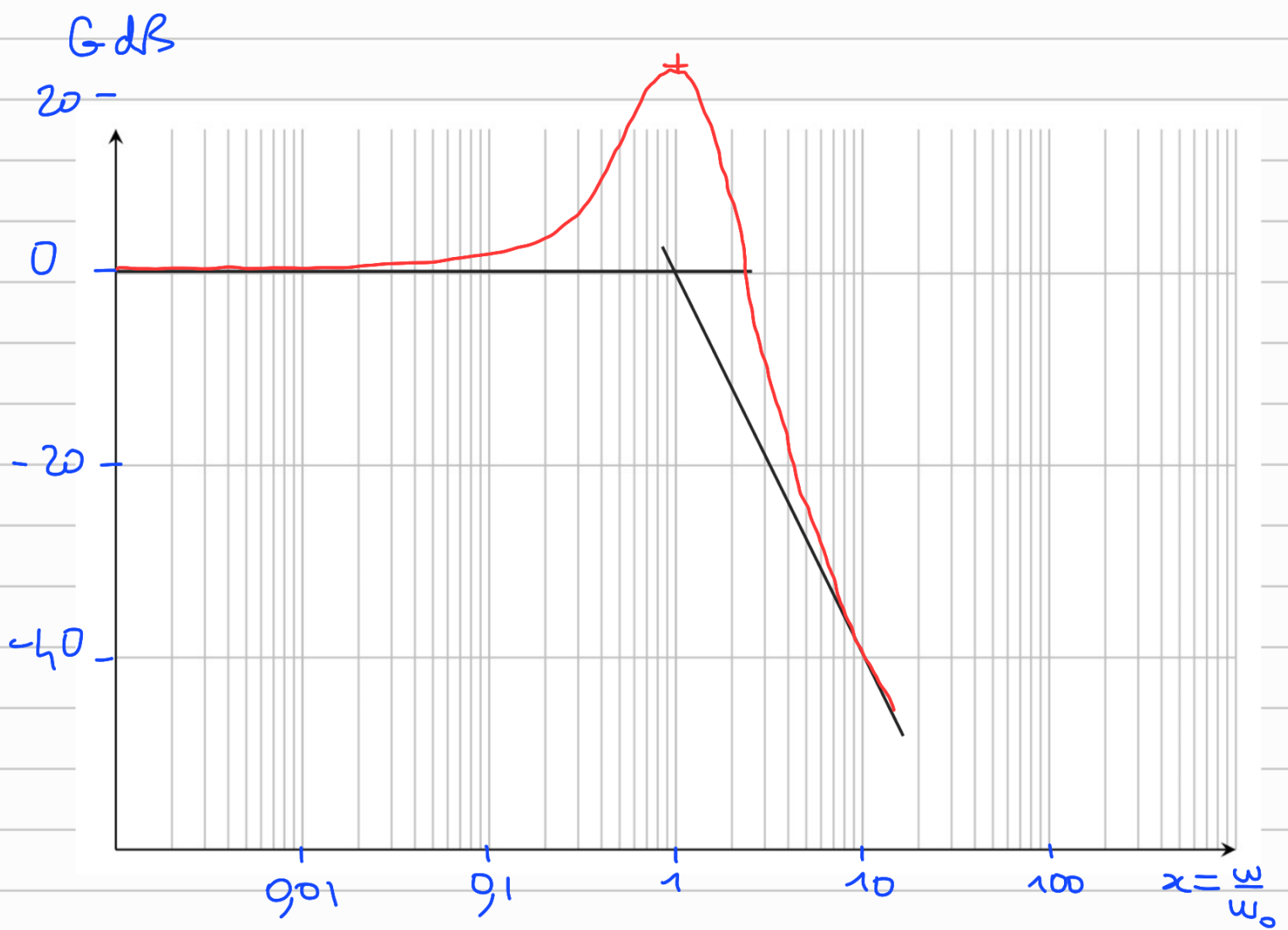
les asymptotes se coupent en $\frac{1}{\frac{Z_R}{Z_C} + \frac{Z_C}{Z_C} + 1}$.

Pour $\omega = \omega_0$ ($x = 1$) $\underline{H}(j\omega_0) = \frac{1}{-jQ}$

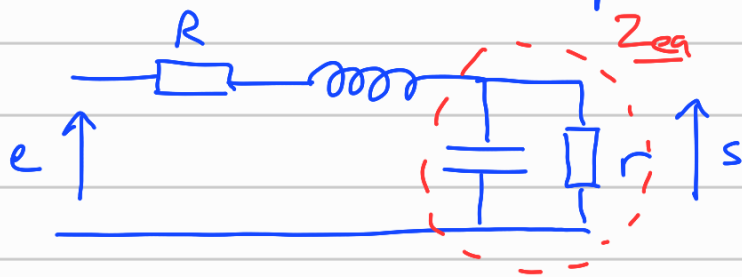
$$\underline{H}(j\omega_0) = jQ$$

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log Q = 20$$

$$\text{et } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{200}} \sim \omega_0$$



Q7. Avec r en parallèle de C :



avec $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{r} + jC\omega$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{Z_R}{Z_{eq}} + \frac{Z_L}{Z_{eq}} + 1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r} + jC\omega\right)(R + jL\omega)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R}{r} + j\frac{L}{r}\omega + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{R}{r} - LC\omega^2 + j\left(\frac{L}{r} + RC\right)\omega}$$

$$= \frac{1 / (1 + R/r)}{1 - \frac{LC\omega^2}{1 + \frac{R}{r}} + j \frac{L/r + RC}{1 + \frac{R}{r}} \omega}$$

Gain en statique :

$$H'_0 = \frac{1}{1 + \frac{R}{r}}$$

En augmentant la valeur de r le gain statique augmente le gain statique $\Rightarrow$ augmente le volume du son produit.
+ Influence sur la fréquence de coupure.

$$Q8 \quad \underline{Z} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 + jC\omega(R + jL\omega)}{R + jL\omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Q9. Avec un pont diviseur de tension :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_z = \underline{e} \frac{\underline{Z}}{r + \underline{Z}} \\ \underline{U}_r = \underline{e} \frac{r}{r + \underline{Z}} \end{array} \right\} \frac{\underline{U}_z}{\underline{U}_r} = \frac{\underline{Z}}{r}$$

$$\underline{Z} = r \frac{\underline{u}_z}{\underline{u}_r}$$

Q10 A basse fréquence

$$\begin{cases} \omega \ll \frac{R}{L} \\ \omega \ll \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \omega \ll \frac{1}{RC} \end{cases}$$

Donc $\underline{Z} \sim R$

A basse fréquence on a donc $R = \left| \frac{\underline{u}_z}{\underline{u}_r} \right| r$

* Pour le micro fender $R_F \sim 1,4 r$

(lecture graphique avec l'échelle :
 $2,1 \text{ cm} \leftrightarrow 1$
 $0,3 \leftrightarrow ? = 0,14$ et $10^{9/10} \sim 1,4$.)

Avec $r = 10 \text{ k}\Omega$ $R_F = \underline{14 \text{ k}\Omega}$

* Pour le micro Dynasonic $R_D \sim 7 \cdot 10^{-1} r$
 (tombe sur la graduation $7 \cdot 10^{-1}$)

$\Rightarrow R_D = \underline{7 \text{ k}\Omega}$

Q11. Si $\underline{Z}$ est dominé par R et L

$\underline{Z} \approx R + jL\omega$

$$|\underline{Z}| \approx \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} = r \left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_r} \right|$$

$$R^2 + L^2 \omega^2 \approx r^2 \left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_r} \right|^2$$

$$L \approx \frac{1}{\omega} \sqrt{r^2 \left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_r} \right|^2 - R^2}$$

On lit pour $f = 1 \text{ kHz}$ sur les 2 courbes :

$$L_F \approx \frac{1}{2\pi \cdot 10^3} \sqrt{10^8 (6 \cdot 10^0)^2 - (15 \cdot 10^3)^2} = \underline{9 \text{ H}}$$

$$L_D = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3} \sqrt{10^8 (10^{0,14})^2 - (7 \cdot 10^3)^2} = \underline{2 \text{ H}}$$

Q 12.

$$\underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = R \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\text{Par identification} \begin{cases} \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \\ LC = \frac{1}{\omega_0^2} \\ RC = \frac{1}{Q\omega_0} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{Or } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \approx 2\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{ pour } \omega \approx \omega_0$$

$$\text{soit } Z \approx R \frac{1 + jQ}{2\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + jQ}$$

$$\text{Pour } Q \gg 1 \quad Z \approx R \frac{jQ^2}{2Q\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + j}$$

Pour $Q \gg 1$ $|Z|$ est maximale pour $\omega = \omega_0$
($f = f_0$)

On lit sur le graphique $f_{0F} = 3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$$\text{Or } \sqrt{L_F C_F} = \frac{1}{\omega_{0F}} = \frac{1}{2\pi f_{0F}}$$

$$\Rightarrow C_F = \frac{1}{4\pi^2 f_{0F}^2} \cdot \frac{1}{L_F}$$

$$\text{AN: } C_F = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (3 \cdot 10^3)^2} \cdot \frac{1}{9} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ F} \\ = \underline{\underline{0,3 \text{ nF}}}$$

$$\text{Et } C_D = \frac{1}{4\pi^2 (35 \cdot 10^4)^2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ F} \\ = \underline{\underline{20 \text{ pF}}}$$

Q13 a) le signal a une valeur moyenne de 10 mV

b) En supposant le signal périodique, on repère 2 périodes entre $t_1 = 1,4 \text{ ms}$ et $t_2 = 7,7 \text{ ms}$
D'où $T = \frac{t_2 - t_1}{2}$

$$\text{AN: } T = \frac{7,7 - 1,4}{2} \quad \text{soit} \quad \underline{T = 3,2 \text{ ms}}$$

$$\text{On en déduit } f = \frac{1}{T}$$

$$\text{AN: } f = \frac{1}{3,2 \cdot 10^{-3}} \quad \text{soit} \quad \underline{f = 3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}}$$

(valeur obtenue avec la valeur non arrondie de T)

c) le signal étant supposé périodique, il peut être décomposé en série de Fourier. N'étant pas purement sinusoïdal, son spectre comportera des harmoniques (fréquences multiples du fondamental).

Q14 a) Ce filtre est un passe-haut (les fréquences inférieures à 100 Hz sont atténuées).

b) On lit la fréquence de coupure lorsque le déphasage vaut $\pi/2$: $f_0 = 10 \text{ Hz}$

c) Pente de l'asymptote BF

$$\left. \begin{array}{l} G_{dB} = -60 \text{ dB} \quad \text{pour } f = 0,4 \text{ Hz} \\ G_{dB} = -20 \text{ dB} \quad \text{pour } f = 4 \text{ Hz} \end{array} \right\} \text{ pente } +40 \text{ dB/dec}$$

L'asymptote HF est horizontale (pente nulle)

Q15 * Gain et déphasage pour un signal de fréquence 2 Hz : $G_{dB} = -30 \text{ dB}$
soit $G = 0,03$
 $\varphi = 0,85\pi \text{ rad}$

* Idem, pour un signal de 20 Hz :
 $G_{dB} = -5 \text{ dB}$
soit $G = 0,56$
 $\varphi = 0,35\pi$

* Idem pour un signal de 200 Hz :
 $G_{dB} = 0$
soit $G = 1$
 $\varphi = 0^\circ$

On obtient donc en sortie :

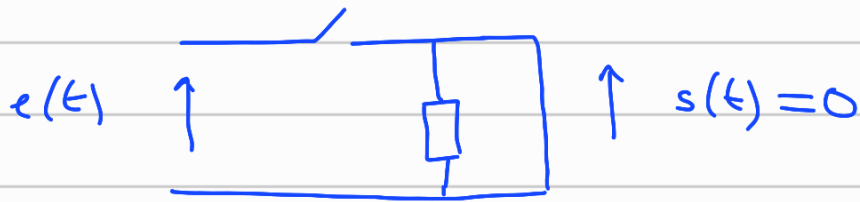
$$s(t) = 0,03 E_0 \cos(\omega t + 0,85\pi) + 0,56 E_0 \cos(10\omega t + \frac{\pi}{2} + 0,35\pi) \\ + E_0 \cos(100\omega t - \pi/3)$$

$$\text{Soit } s(t) = 0,03 E_0 \cos(\omega t + 0,85\pi) + 0,56 E_0 \cos(10\omega t + 0,85\pi) \\ + E_0 \cos(100\omega t - \frac{\pi}{3})$$

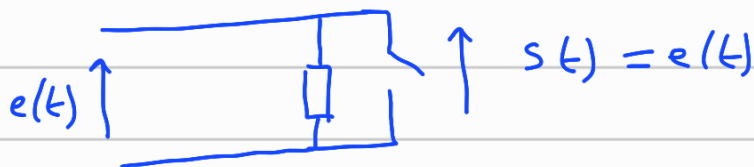
avec $E_0 = 1 \text{ V}$ on a :

$$s(t) = 0,03 \cos(\omega t + 0,85\pi) + 0,56 \cos(10\omega t + 0,85\pi) \\ + \cos(100\omega t - \pi/3)$$

Q16. * Comportement à basse fréquence :
 condensateur $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert
 bobine $\Leftrightarrow$ fil



* Comportement à haute fréquence :
 condensateur $\Leftrightarrow$ fil
 bobine $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert.



Le filtre proposé est donc bien un passe haut.

$$Q17 \text{ a) } \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} \cdot \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\text{avec } \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}\right) \left(\frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$$

$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j\frac{LC\omega}{RC}}$$

Par identification :

$$\begin{cases} -LC = \frac{K}{\omega_0^2} \\ LC = \frac{1}{\omega_0^2} \\ \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 Q} \end{cases}$$

$$K = -1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{R} = \frac{\sqrt{LC}}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{R\sqrt{LC}}{L} \Leftrightarrow Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

b) $\varphi = \arg(\underline{H})$

Or la partie réelle du dénominateur n'est pas toujours positive, on multiplie donc numérateur et dénominateur par $(-j)$.

$$\underline{H} = \frac{jx^2}{\frac{x}{Q} - j + jx^2}$$

$$\text{Et } \arg(\underline{H}) = \arg(jx^2) - \arg\left(\frac{x}{Q} + j(x^2 - 1)\right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x/Q}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \underline{0}$$

$$c) \quad G = |\underline{H}| = \frac{|K|x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Pour $x \ll 1$ on a $G \approx |K|x^2$

$$\Rightarrow G_{dB, BF} = 20 \log(|K|x^2) = 20 \log|K| + 40 \log x$$

La pente de l'asymptote à basse fréquence vaut donc $+40 \text{ dB/dec}$.

$$d) \quad \text{Pour } x=1 \quad G = \frac{|K|}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} = Q$$

$$x=1 \Leftrightarrow f=f_0 = 10 \text{ Hz}$$

$$\text{On lit } G_{dB}(f=10 \text{ Hz}) = -10 \text{ dB}$$

$$\text{donc } G(x=1) = 10^{-\frac{10}{20}} = 0,3$$

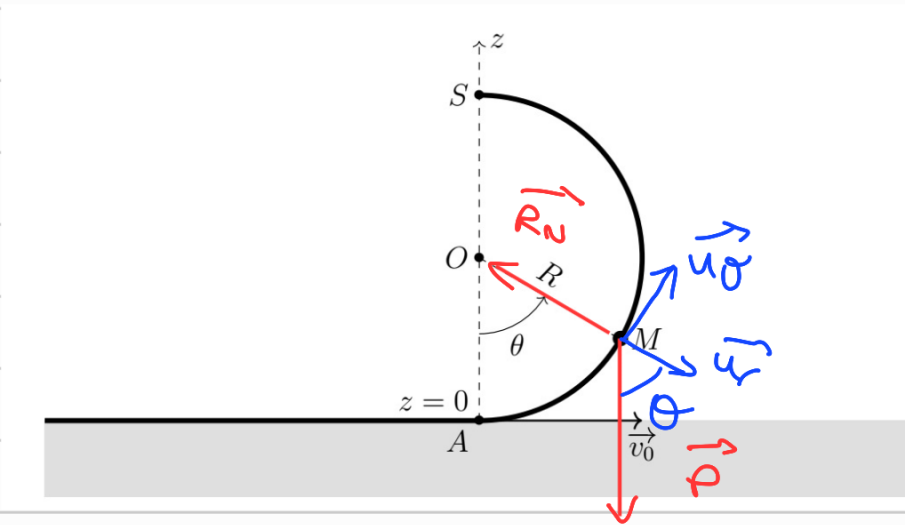
$$\text{On a donc } \underline{Q = 0,3}$$

Exercice 2 :

Q1. PFD appliqué à $\{m\}$ dans R_f galiléen:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$



Dans la base polaire :

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{R}_N = -R_N \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m R \ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (1) \\ -m R \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - R_N & (2) \end{cases}$$

Q2. D'après ① : $\ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta \cdot \dot{\theta}$

On intègre de $\theta=0$ à θ : $\int_0^\theta \ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} dt = \int_0^\theta -\frac{g}{R} \sin \theta \cdot \dot{\theta} dt$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right]_0^\theta = \left[\frac{g}{R} \cos \theta \right]_0^\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_{\theta=0}^2 = \frac{g}{R} (\cos \theta - \cos 0)$$

en $\theta=0$ (point A) : $R\dot{\theta}(0) = v_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{v_0^2}{2R^2} = \frac{g}{R} (\cos \theta - 1)$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta)}$$

Q3. On injecte l'expression de $\dot{\theta}^2$ dans ② :

$$-mR \left(\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta) \right) = mg \cos \theta - R_N$$

$$R_N = mg \cos \theta + \frac{mv_0^2}{R} - 2mg (1 - \cos \theta)$$

$$\boxed{R_N = 3mg \cos \theta - 2mg + \frac{mv_0^2}{R}}$$

Q4. Pour que la bille atteigne le point S il faut $R_N > 0$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\Leftrightarrow 3mg \cos \pi - 2mg + \frac{mv_0^2}{R} > 0$$

$$\frac{mv_0^2}{R} > 5mg$$

$$v_0 > \sqrt{5Rg}$$

$$\text{AN: } v_{\min} = \sqrt{5 \cdot 0,30 \cdot 9,8} \\ = \underline{3,8 \text{ m.s}^{-1}}$$

Q5 Sur la partie horizontale la bille est soumise à son poids et à la réaction du support qui est normale au support car on néglige les frottements.

D'après le PFD appliqué à $\{N\}$ dans R_T galiléen et projeté dans la direction verticale : $(\vec{P} + \vec{R}_N) \cdot \vec{u}_z = m\vec{a} \cdot \vec{u}_z = 0$ car le mouvement est dans le plan horizontal ($z = 0 = \text{cte}$)

$$\text{D'où } \vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}.$$

D'après la 1^{ère} loi de Newton appliquée à N dans R_T galiléen la bille est en mouvement rectiligne uniforme.

Q6. D'après le TET appliqué à Π entre l'instant initial quand le ressort est relâché et son passage en A :

$\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{nc}) = 0$ car les seules forces qui s'exercent sur Π sont conservatives ($\vec{P}$ et $\vec{F}_\ell$) ou ne travaillent pas ($\vec{R}_N$)

$$\Rightarrow E_{ci} + E_{pi} = E_{cA} + E_{pA}$$

$$0 + \frac{1}{2} k (2R - R)^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_A = R \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$Q7 \quad R \sqrt{\frac{k}{m}} > \sqrt{5Rg} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{k > \frac{5mg}{R}}$$

$$\begin{aligned} \text{AN: } k_{\min} &= \frac{5 \cdot 0,020 \cdot 9,8}{0,30} \\ &= \underline{\underline{3,3 \text{ N.m}^{-1}}} \end{aligned}$$

Q8. Après son passage en S la bille est en chute libre, avec la vitesse initiale $\vec{v}_S = R \dot{\theta}_S \vec{u}_\theta = -v_S \vec{u}_x$

Détermination de $v_S = R \dot{\theta}_S$

$$\text{avec } \dot{\theta}_S^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R} (1 - \cos \pi)$$

$$\dot{\theta}_s = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4g}{R}} \Rightarrow v_s = \sqrt{v_0^2 - 4Rg}$$

d'où $\vec{v}_s = -\sqrt{v_0^2 - 4Rg} \vec{u}_x$ et $s \begin{pmatrix} 0 \\ 2R \end{pmatrix}$

PFD appliqué à $\{ \Pi \}$ dans R_T galiléen : $\vec{a} = \vec{g}$

Après projection dans $(A, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et intégrations :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -v_s \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -v_s t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2R \end{cases}$$

Déterminons la coordonnée x pour $z=R$

$$R = -\frac{1}{2}gt_R^2 + 2R \Rightarrow t_R = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$x(t_R) = -\sqrt{v_0^2 - 4Rg} \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$x(t_R) = -\sqrt{\frac{2v_0^2 R}{g} - 8R^2}$$

$$\text{or } v_0^2 > 5Rg \Rightarrow \frac{2v_0^2 R}{g} - 8R^2 > 2R^2$$

$$x(t_R) < -\sqrt{2}R \Rightarrow \boxed{x(t_R) < -R}$$

La bille ne peut donc pas retomber entre 0 et E , elle retombe sur le plateau EF.

Q9. Au cours de sa chute libre, la vitesse de la bille garde une composante horizontale constante (mouvement de chute libre), de norme v_s établie précédemment.

$$v_E = \sqrt{v_0^2 - 4Rg}$$

Sur le plan EF la bille est soumise à 2 forces dont la somme est nulle : $\vec{P} + \vec{R}_N$

D'après le PFD appliqué à $\{M\}$ sur DE $\vec{a} = \vec{0}$ la bille est donc en mouvement rectiligne uniforme, sa vitesse garde une norme (et une direction) constantes : $v_F = v_E$

Le point F est le début du mouvement circulaire de rayon $R/2$ repéré en coordonnées polaires de centre O'

$$v_F = \frac{R}{2} \dot{\alpha}_F \Rightarrow \dot{\alpha}_F = \frac{2}{R} v_E$$

D'après le PFD appliqué à $\{M\}$ après F :
 $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$

$$\text{avec } \vec{v} = \frac{R}{2} \dot{\alpha} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \frac{R}{2} \ddot{\alpha} \vec{u}_\theta - \frac{R}{2} \dot{\alpha}^2 \vec{u}_r$$

$$\vec{P} = mg \sin \alpha \vec{u}_\theta - mg \cos \alpha \vec{u}_r$$

$$\vec{R}_N = R_N \vec{u}_r$$

On a donc

$$\begin{cases} mg \sin \alpha = m \frac{R}{2} \ddot{\alpha} \\ -mg \cos \alpha + R_N = -m \frac{R}{2} \dot{\alpha}^2 \end{cases}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{2g}{R} \sin \alpha$$

$\Rightarrow$ on primitive : $\frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 = -\frac{2g}{R} \cos \alpha + cte$

Pour $\alpha = 0$ $\dot{\alpha}_F = \frac{2}{R} \sqrt{v_0^2 - 4Rg}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{4}{R^2} (v_0^2 - 4Rg) \right) = -\frac{2g}{R} \cos 0 + cte$$

$$2 \left(\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4g}{R} \right) = -\frac{2g}{R} + cte$$

$$\frac{2v_0^2}{R^2} - \frac{8g}{R} + \frac{2g}{R} = cte$$

$$cte = \frac{2v_0^2}{R^2} - \frac{6g}{R}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 = -\frac{2g}{R} \cos \alpha + \frac{2v_0^2}{R^2} - \frac{6g}{R}$$

$$\dot{\alpha}^2 = -\frac{4g}{R} \cos \alpha + \frac{4v_0^2}{R^2} - \frac{12g}{R}$$

D'où

$$R_N = -m \frac{R}{2} \left(-\frac{4g \cos \alpha}{R} + \frac{4v_0^2}{R^2} - \frac{12g}{R} \right) + mg \cos \alpha$$

$$R_N = 2mg \cos \alpha - \frac{2mv_0^2}{R} + 6mg + mg \cos \alpha$$

$$R_N = 3mg \cos \alpha + 6mg - \frac{2v_0^2 m}{R}$$

Calculons R_N pour $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} R_N(\alpha=0) &= 3mg + 6mg - \frac{2v_0^2 m}{R} \\ &= 9mg - \frac{2v_0^2 m}{R} \end{aligned}$$

$$\text{or } v_0^2 > 5Rg \Rightarrow \frac{2v_0^2 m}{R} > \frac{10Rgm}{R}$$

$$9mg - \frac{2mv_0^2}{R} < -10mg + 9mg$$

$$R_N(\alpha=0) < -mg$$

$$R_N < 0$$

Or R_N est positif si Π est en contact avec le support
 $\Rightarrow$ la bille décolle dès son passage en F.

Q10. Sur les portions DA et EF R_N a une norme constante (pas de mouvement dans la direction verticale donc $\vec{a} \cdot \vec{u}_z = 0$)
 $\Rightarrow$ les forces s'annulent dans la direction (Oz) . $\Rightarrow \|\vec{R}_N\| = mg = \text{cte}$.

le système est donc soumis à une force de frottement constante :
 $m \vec{a} \cdot \vec{u}_x = \vec{R}_T \cdot \vec{u}_x = -\|\vec{R}_T\| \|\vec{u}_x\|$

$\Rightarrow$ mouvement uniformément décéléré

Q11. On applique le TEF à la bille $\{m\}$ dans R_T galiléen entre son départ (lorsqu'on libère le ressort) et le point A :

$$\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{ng}) = W(\vec{R}_T) + \underbrace{W(\vec{R}_N)}_{=0}$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} k R^2 = \int_{EI}^A \vec{R}_T \cdot d\vec{on}$$

$$\text{avec } \vec{R}_T = -mg\mu \cdot \vec{u}_x$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} k R^2 = -mg\mu (3R - 0)$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} k R^2 - 3 g \mu R$$

$$v_A = \sqrt{\frac{k}{m} R^2 - 6 \mu R g}$$

Q12 La bille peut être immobile si
 $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T = \vec{0}$

$$\begin{aligned}\vec{P} &= mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta \\ \vec{R}_N &= -R_N \vec{u}_r \\ \vec{R}_T &= R_T \vec{u}_\theta\end{aligned}$$



$$\begin{cases} mg \cos \theta - R_N = 0 \\ -mg \sin \theta + R_T = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_N = mg \cos \theta \\ R_T = mg \sin \theta \end{cases}$$

Or l'équilibre est possible si $\frac{R_T}{R_N} \leq \mu$

$$\Rightarrow \boxed{\theta \leq \arctan \mu}$$

Q13 . On lit sur le graphique l'équilibre est possible pour $\theta \leq \frac{\pi}{12}$

$$\mu = \tan \frac{\pi}{12} = \underline{0,27}$$

Q14 Sur le portrait de phase, on lit que la bille peut atteindre le point S ($\theta_{\pi} = 1$) lorsque la vitesse angulaire initiale est supérieur à environ $3,6 \cdot \sqrt{g/R}$

$$\rightarrow \text{il faut } \dot{\theta}_A > 3,6 \sqrt{g/R}$$

$$\text{Or } \dot{\theta}_A = \frac{v_A}{R} \Rightarrow \text{il faut } v_A > 3,6\sqrt{Rg}$$

$$\text{Or } v_A = \sqrt{\frac{kR^2}{m} - 6\mu Rg}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{kR^2}{m} - 6\mu Rg} > 3,6\sqrt{Rg}$$

$$\Rightarrow \frac{kR^2}{m} - 6\mu Rg > 3,6^2 \cdot Rg$$

$$\Rightarrow \frac{kR^2}{m} > (3,6^2 + 6\mu) Rg$$

$$\Rightarrow \boxed{k > \frac{mg}{R} (3,6^2 + 6\mu)}$$

$$\text{AN: } k > \frac{0,020 \cdot 9,8}{0,30} (3,6^2 + 6 \cdot 0,27) = \underline{9,5 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Q15 L'équation en pointillés correspond au "dérochage" de la bille du support cylindrique, soit $R_N = 0$.

On applique le PFD à la bille dans $\mathcal{R}_T$ galiléen avec

$$\begin{cases} \vec{P} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta \\ \vec{R}_N = -R_N \vec{u}_r \\ \vec{R}_T = R_T \vec{u}_\theta = \mu R_N \vec{u}_\theta \quad (\text{cas du mouvement}) \end{cases}$$

$$\text{et } \vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg \cos \theta - R_N = -mR\dot{\theta}^2 \\ -mg \sin \theta + \mu R_N = mR\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$R_N = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \text{valable pour } \cos \theta < 0 \Rightarrow \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{-\frac{g}{R} \cos \theta}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{g/R}} = \sqrt{-\frac{g/R}{g/R} \cos \theta} = \sqrt{-\cos \theta}$$

La courbe en pointillés a pour équation

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{g/R}} = \sqrt{-\cos \theta}}$$

Exercice 3 :

Q1. Bilan des forces sur l'oscillateur de masse m :

* poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_x$

* force de frottement : $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$

* force de rappel élastique :

$\vec{F}_{el} = -k(l-l_0) \vec{u}_{el}$ avec $\vec{u}_{el} = \vec{u}_x$
et $l(t) = x$

$\Rightarrow \vec{F}_{el} = -k(x-l_0) \vec{u}_x$

D'après le PFD appliqué à {masse m } dans R_T galiléen :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_f + \vec{F}_{el}$$

En projetant suivant Ox il vient :

$$m \vec{a} \cdot \vec{u}_x = \vec{P} \cdot \vec{u}_x + \vec{F}_f \cdot \vec{u}_x + \vec{F}_{el} \cdot \vec{u}_x$$

$$m \ddot{x} = -mg - \alpha \dot{x} - k(x-l_0)$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m}(x-l_0) + g = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} \left(x - l_0 + \frac{mg}{k} \right) = 0$$

On pose $X = x - l_0 + \frac{mg}{k}$

on a alors $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Par identification
$$\begin{cases} 2\zeta\omega_0 = \frac{\alpha}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{\alpha}{m} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\boxed{\zeta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}}$$

Q2. L'oscillateur est soumis à la force supplémentaire $\vec{F}(t)$:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_f + \vec{F}_d + \vec{F}(t)$$

En projection sur Ox on obtient :

$$m\ddot{x} = -mg - \alpha\dot{x} - k(x - l_0) - F_0 - F_1 \cos(2\pi ft)$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} \left(x - l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{F_0}{k} \right) = - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$$

$$\text{or} \quad \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{m} \frac{m}{k} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} \underbrace{\left(x - l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right)}_Y = - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$$

$$\text{et } \ddot{x} = \ddot{Y} \text{ et } \dot{x} = \dot{Y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{d}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi f t)$$

Avec les notations proposées $\frac{d}{m} = 2\xi\omega_0$ et $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi f t)$$

Q3. On associe les grandeurs complexes aux grandeurs réelles telles que :

$$y = \text{Re}(\underline{Y}) \quad \text{et} \quad F_1 = \text{Re}(\underline{F_1})$$

les grandeurs complexes vérifient l'équation différentielle :

$$\underline{\ddot{Y}} + 2\xi\omega_0 \underline{\dot{Y}} + \omega_0^2 \underline{Y} = - \frac{\underline{F_1}}{m}$$

$$- \omega^2 \underline{Y} + 2\xi\omega_0 j\omega \underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = - \underline{E}$$

$$\underline{Y} (-\omega^2 + j2\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2) = -\underline{E}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - j2\xi\omega\omega_0}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 - j2\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right)}$$

$$\underline{H}(j\Omega) = \frac{-1}{\omega_0^2 (1 - \Omega^2 + j2\xi\Omega)}$$

Q4. Il faut étudier les variations de $|\underline{H}|$:

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2}} = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{f(\Omega)}}$$

$$\text{avec } f(\Omega) = (1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2$$

$$|\underline{H}|' = \frac{1}{\omega_0^2} \left(-\frac{1}{2}\right) f'(\Omega) f^{-3/2}$$

donc on déduit les variations de $|\underline{H}|$ de celles de $f'(\Omega)$.

$$f'(\Omega_r) = 0 \Leftrightarrow -4\Omega_r(1-\Omega_r^2) + 8\xi^2 \Omega_r = 0$$

$$1 - \Omega_r^2 = 2\xi^2$$

$$\Omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$\Omega \text{ existe si } 2\xi^2 < 1$$

$$\Rightarrow \text{Résonance possible si } \boxed{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$f'(\Omega) < 0 \Leftrightarrow 4\Omega(1-\Omega^2) > 8\xi^2 \Omega$$

$$1 - \Omega^2 > 2\xi^2$$

$$\Omega^2 < 1 - 2\xi^2$$

$$\Omega < \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$\text{et } f'(\Omega) > 0 \text{ si } \Omega > \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

	0	Ω_r	$+\infty$
$g'(\Omega)$	-	0	+
$ H '$	+	0	-
$ H $			

$$|H| = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2}}$$

Pour $\omega = \omega_r$ $\Omega = \Omega_r = \sqrt{1-2\xi^2}$

$$|H(\omega_r)| = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1-(1-2\xi^2))^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}}$$

$$|H(\omega_r)| = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{4\xi^2 - 4\xi^4}}$$

$$|H(\omega_r)| = \frac{1}{2\omega_0^2 \sqrt{\xi^2 - \xi^4}} \approx \frac{1}{2\omega_0^2 \xi}$$

Pour $\xi \ll 1$ $|H(\omega_r)| \approx \frac{1}{2\xi\omega_0^2}$

Q5. Graphiquement on lit $\omega_r = 12 \text{ rad.s}^{-1}$

et $20 \log(\omega_0^2 |H(\omega_r)|) = 9 \text{ dB}$

$$\Rightarrow \omega_0^2 |H(\omega_r)| = 10^{9/20}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \cdot \frac{1}{2 \xi \omega_0^2} = 10^{9/20}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \cdot 10^{-9/20} = \underline{0,18}$$

Q6. Si la structure est excitée à la fréquence de résonance, ses oscillations peuvent devenir importantes, et entraîner des dégâts voir la destruction de la structure.

Q7. On observe des pics régulièrement espacés sur le spectre ($f_n = n f_0$) ce qui caractérise un signal périodique. On détermine sa fréquence avec la fréquence du mode fondamental $f_0 = 2 \text{ Hz}$. (et les harmoniques ont des fréquences multiples de 2 Hz).

Q8. $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 \simeq 12,5 \text{ rad.s}^{-1}$.

Sans amortisseur, la fréquence de résonance du pont était proche de celle de la marche ($\sim 2 \text{ Hz}$).

Avec l'ajout de l'amortisseur l'amplitude des oscillations n'est plus amplifiée à cette fréquence (résonance supprimée).