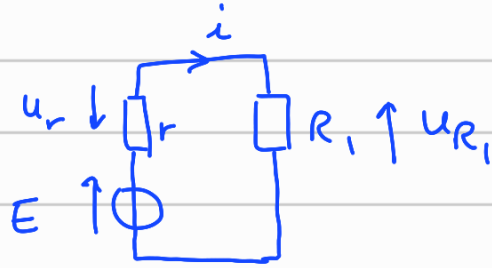


Q1. lorsque  $K$  est ouvert il n'y a qu'une maille :



La loi des mailles donne :  $E - u_r - u_{R_1} = 0$

D'après la loi d'Ohm en convention générateur  
 $u_r = r i_{\text{ouvert}}$  et  $u_{R_1} = R_1 i_{\text{ouvert}}$

D'où  $E = (r + R_1) i_{\text{ouvert}}$

$$i_{\text{ouvert}} = \frac{E}{r + R} \quad \text{car } R_1 = R$$

$$P_{\text{ouvert}} = u_{R_1} \times i_{\text{ouvert}} = R i_{\text{ouvert}}^2$$

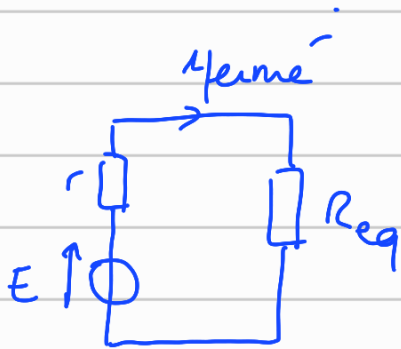
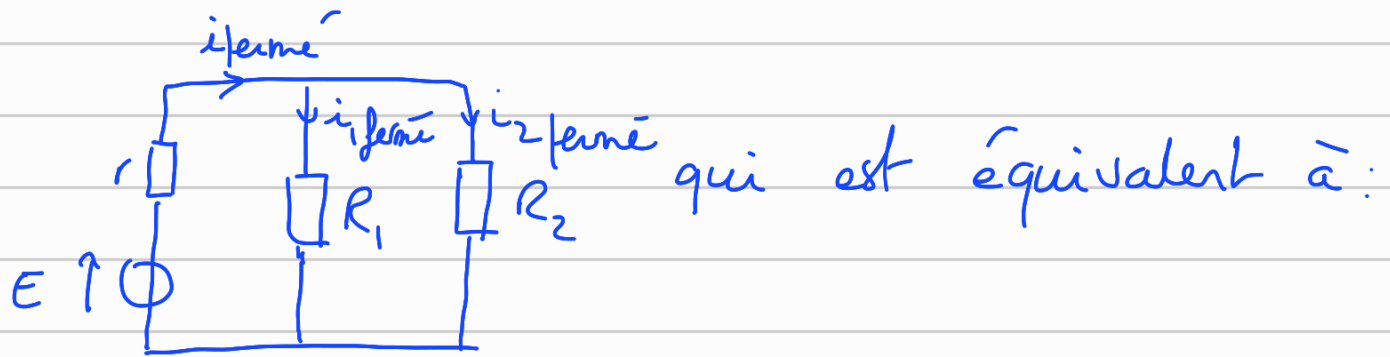
$$P_{\text{ouvert}} = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$$

et

$$P_{2\text{ouvert}} = 0$$

car aucun courant ne traverse  $R_2$

Q2. lorsque  $K$  est fermé on a le circuit :



avec  $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Soit  $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2}$

avec  $R_1 = R_2 = R$

D'où  $i_{fermé} = \frac{E}{r + \frac{R}{2}}$

Soit  $i_{fermé} = \frac{2E}{R + 2r}$

D'après la formule du pont diviseur de courant :

$$i_{1_{fermé}} = i_{fermé} \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} = i_{fermé} \frac{1/R}{2/R} = \frac{i_{fermé}}{2}$$

$$i_{2 \text{ fermé}} = i_{\text{fermé}} - i_{1 \text{ fermé}} = i_{1 \text{ fermé}} = \frac{i_{\text{fermé}}}{2}$$

$$i_{1 \text{ fermé}} = i_{2 \text{ fermé}} = \frac{E}{R + 2r}$$

Q3. Pour un conducteur ohmique  $P = Ri^2$

donc  $P_{1 \text{ fermé}} = P_{2 \text{ fermé}} = \frac{RE^2}{(R + 2r)^2}$

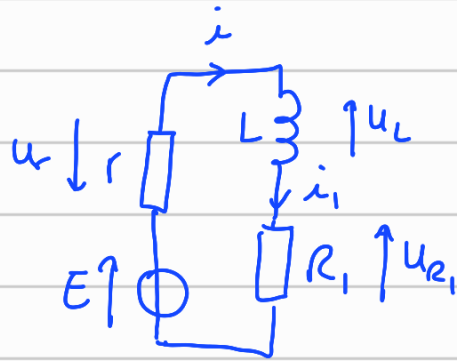
Q4. Lorsque l'interrupteur est fermé, la guirlande 1 reçoit une puissance inférieure car  $2r + R < r + R$ , si  $r \neq 0$  ce qui est le cas d'un générateur réel.

La guirlande 1 va donc elle aussi clignoter, alternant entre une forte et une faible production de lumière.

Rq: Si  $r = 0$  alors  $P_{\text{ouvert}} = P_{1 \text{ fermé}}$  alors la guirlande 1 ne clignoterait pas.

Q5. Pour limiter cet effet il faut choisir  $r$  telle que  $2r \ll R$ .  
Ce n'est pas le cas pour  $r = 1 \Omega$  et  $R = 2 \Omega$ .

Q6 a) Sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}[$  on a le circuit:



loi des mailles :  $E - u_r - u_L - u_{R_1} = 0$

loi d'Ohm et loi intensité-tension de la bobine :

$$u_r = r i_1 \quad u_{R_1} = R i_1 \quad u_L = L \frac{di_1}{dt}$$

Soit 
$$L \frac{di_1}{dt} + (R+r) i_1 = E$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{(R+r)}{L} i_1 = \frac{E}{L}$$

que l'on met sous forme canonique :

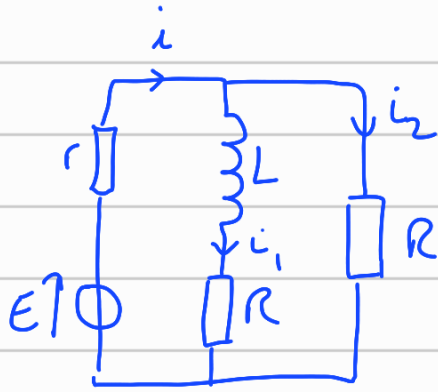
$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_0} = \frac{E}{L}} \quad \text{avec } \tau_0 = \frac{L}{R+r}$$

b) En régime permanent continu :

$$i_1 = \frac{\tau_0 E}{L} = \frac{E}{r+R} \quad \text{ce qui était la valeur sans bobine } (i_{\text{ouvert}})$$



Q7a) Sur l'intervalle  $[\frac{T}{2}, T[$   $\kappa$  est fermé  
donc le circuit est :



Lois des mailles :  $E = ri + Ri_1 + L \frac{di_1}{dt}$

$$E = ri + Ri_2$$

Loi des nœuds  $i = i_1 + i_2$

$$\Rightarrow E = (r+R)i_1 + ri_2 + L \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{et } Ri_2 - Ri_1 - L \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$i_2 = i_1 + \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt}$$

$$\Rightarrow E = (r+R)i_1 + r\left(i_1 + \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt}\right) + L \frac{di_1}{dt}$$

$$E = L\left(1 + \frac{r}{R}\right) \frac{di_1}{dt} + (R+2r)i_1$$

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{R+2r}{L(1+r/R)} i_1 = \frac{E}{L(1+r/R)}}$$

Par identification :

$$\tau_t = \frac{L(1+r/R)}{R+2r}$$

b) En régime permanent continu :  $\frac{di_1}{dt} = 0$

d'où  $i_1 = \frac{E}{R+2r}$  ce qui est la valeur obtenue sans la bobine.

Q8. Résolution de l'équation différentielle pour K ouvert donne :

$$\left. \begin{array}{l} i_{1P} = \frac{E}{r+R} \\ i_{1H} = A e^{-t/\tau_0} \end{array} \right\} i_1 = \underbrace{\frac{E}{R+r}}_{=i_{\text{ouvert}}} + A e^{-t/\tau_0}$$

Par continuité du courant traversant la bobine

$i_1(0) = i_{1\text{fermé}}$  (origine des temps choisie à l'ouverture de l'interrupteur)

Soit  $i_{1\text{fermé}} = i_{1\text{ouvert}} + A \Rightarrow A = i_{1\text{fermé}} - i_{1\text{ouvert}}$

$$i_1 = i_{1\text{ouvert}} + (i_{1\text{fermé}} - i_{1\text{ouvert}}) e^{-t/\tau_0}$$

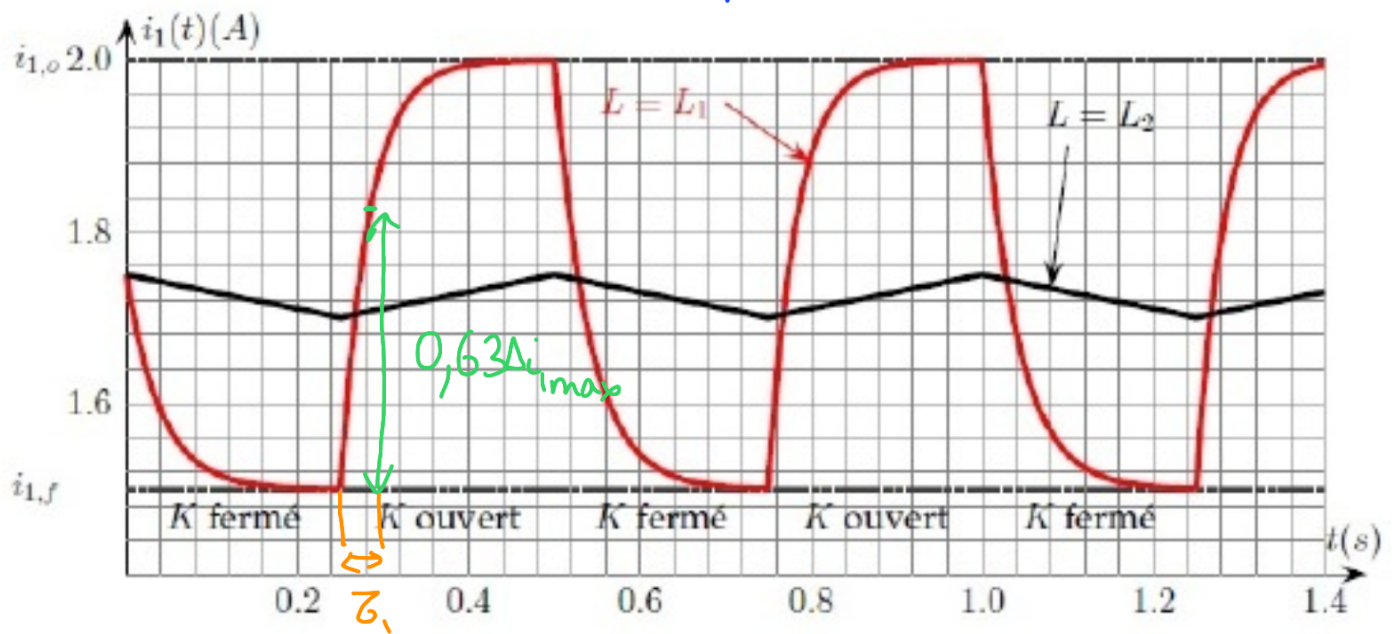
$$\text{Pour } t = \tau_0 \quad i_1 = i_{1\text{ouvert}} + (i_{1\text{fermé}} - i_{1\text{ouvert}}) e^{-1}$$

$$i_1 = i_{1\text{ouvert}} + (i_{1\text{fermé}} - i_{1\text{ouvert}}) \times 0,37$$

$$\Rightarrow i_1 - i_{1\text{fermé}} = 0,63 i_{1\text{ouvert}} - 0,63 i_{1\text{fermé}}$$

$$i_1 - i_{1\text{fermé}} = 0,63 (i_{1\text{ouvert}} - i_{1\text{fermé}})$$

On lit sur le graphique que  $\Delta i = 0,63 \Delta i_{max}$



On lit ainsi  $T_0 \approx 1 \text{ division} = 0,04 \text{ s}$

(Sur votre copie une mesure à la règle avec utilisation d'une échelle est recommandée et donne un résultat plus précis)

$$\text{or } T_0 = \frac{L}{R+r} \Rightarrow L = T_0 (R+r)$$

$$\text{AN: } L = 0,04 \times (2+1) = 0,12 = \underline{0,1 \text{ H}}$$

(avec 1 c.s.)

Q9 On voit sur la courbe correspondant à  $L_2$  que le régime permanent n'est pas atteint à chaque demi-période.  
 $T_0$  est donc plus long avec  $L_2$  donc  $L_2 \gg L_1$ .

On a des portions de droite car  
pour  $t \ll \tau$   $e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau}$

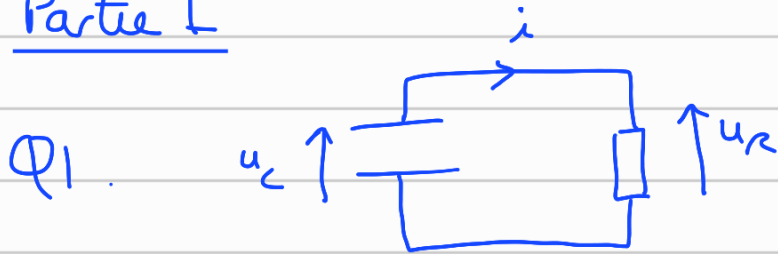
$$\text{Soit } i_1(t) \approx \frac{E}{r+r_2} \left(1 - 1 + \frac{t}{\tau}\right) = \frac{E}{(r+r_2)\tau} \cdot t.$$

Q10 Avec la valeur d'inductance  $L_2$ , la variation de  $i_1$  est d'environ 50 mA, alors qu'avec  $L_1$  elle était de plus de 480 mA.

La valeur  $L_2$  permet donc de lisser la valeur de  $i_1$ , donc elle limite les variations de puissance électrique reçue par la guirlande 1, donc la puissance lumineuse qu'elle émet.

## Exercice 2 :

### Partie I



loi des mailles :  $u_c = u_R$

Lois intensité-tension :  $i = -C \frac{du_c}{dt}$  (convention générateur)

$$u_R = Ri = -RC \frac{du_c}{dt}$$

$$\Rightarrow u_c + RC \frac{du_c}{dt} = 0$$

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = 0 \quad \text{avec } \tau = RC$$

Q2. Solution générale :  $u_c = A e^{-t/\tau}$

(pas de solution particulière car second membre nul).

conditions initiales :  $u_c(0) = U_0$

$$\Rightarrow A = U_0 \Rightarrow u_c(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

Q3.  $R = \frac{\tau}{C}$

donc si on veut  $\tau = 20 \text{ min}$ , il faut  $R = \frac{4.60}{10} = \underline{24 \Omega}$

Q4. Dans le modèle du condensateur plan il faut augmenter la surface  $S$  des armatures et diminuer au maximum la distance  $d$  entre elles ( $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ )

Q5. La résistance  $R_s$  va engendrer des pertes par effet joule à la charge et à la décharge du supercondensateur. Plus  $R_s$  sera élevée, plus la proportion de l'énergie stockée dans le condensateur convertie en lumière sera faible  $\Rightarrow$  il faut  $R_s$  la plus faible possible.

Q6.  $R_f$  va entraîner une décharge du condensateur même lorsque la lampe est éteinte, il faut donc maximiser sa valeur pour limiter cette décharge.

Q7. Lorsque la diode est passante, on a, d'après sa caractéristique:  
 $i = A + B u_d$  (relation affine)

Détermination de A et B :

\* pour  $i = 0$   $u_d = U_{\text{seuil}} \Rightarrow A = -B U_{\text{seuil}}$

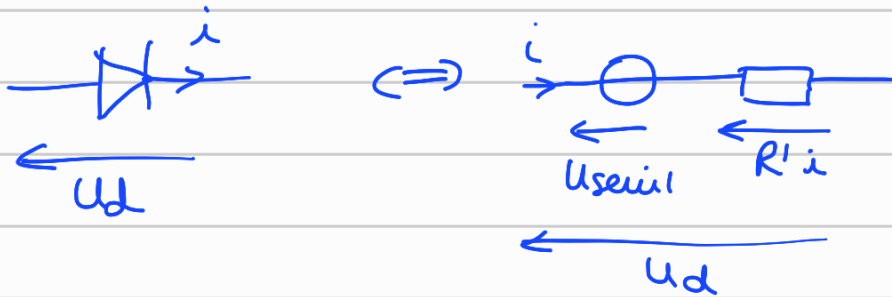
\* pente :  $B = \frac{200 \cdot 10^{-3} - 0}{2,7 - 2,3} = 0,5 \text{ A.V}^{-1}$

$$\Rightarrow i = -0,5 U_{\text{seuil}} + 0,5 u_d$$

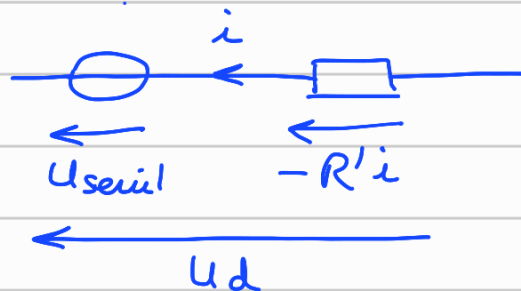
$$\Leftrightarrow u_d = \frac{i + 0,5 U_{\text{seuil}}}{0,5} = U_{\text{seuil}} + 2i$$

avec 2 en  $\text{V.A}^{-1}$ .

La constante  $2 \text{ V.A}^{-1}$  peut s'interpréter comme une résistance, et en convention récepteur on a donc :

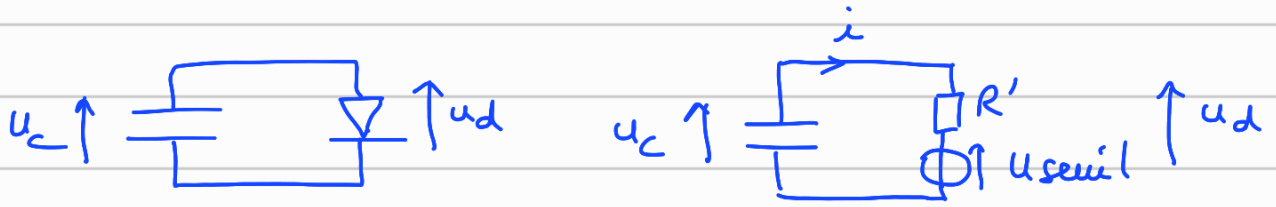


En se plaçant en convention générateur :



Soit  $u_d = U_{\text{seuil}} - R'i$  ; qui peut être interprété comme la intensité-tension d'une source réelle de tension de f.e.m.  $U_{\text{seuil}}$  et de résistance interne  $R'$ .

Q8. Le circuit électrique lorsque la lampe est une diode est donc équivalent à :



loi des mailles :  $u_c = R' \cdot i + U_{seuil}$

loi intensité-tension  $i = -C \frac{du_c}{dt}$  (convention générale pour C)

$$\Rightarrow u_c + R' C \frac{du_c}{dt} = U_{seuil}$$

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{R' C} u_c = \frac{U_{seuil}}{R' C}$$

Soit  $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau'} = \frac{U_{seuil}}{\tau'}$  avec  $\tau' = R' C$

Q9 Solution particulière constante :  $u_c = U_{seuil}$

Solution générale de l'équation homogène :  
 $u_{ch}(t) = A e^{-t/\tau'}$

Solution complète :  $u_c(t) = U_{seuil} + A e^{-t/\tau'}$

Condition initiale :  $u_c(0) = U_0$

$$\Rightarrow U_0 = U_{seuil} + A \Rightarrow A = U_0 - U_{seuil}$$



$$u_c(t) = U_{seuil} + (U_0 - U_{seuil}) e^{-t/\tau'}$$

Q10 \* Valeur à l'origine :  $u_c(0) = U_0$

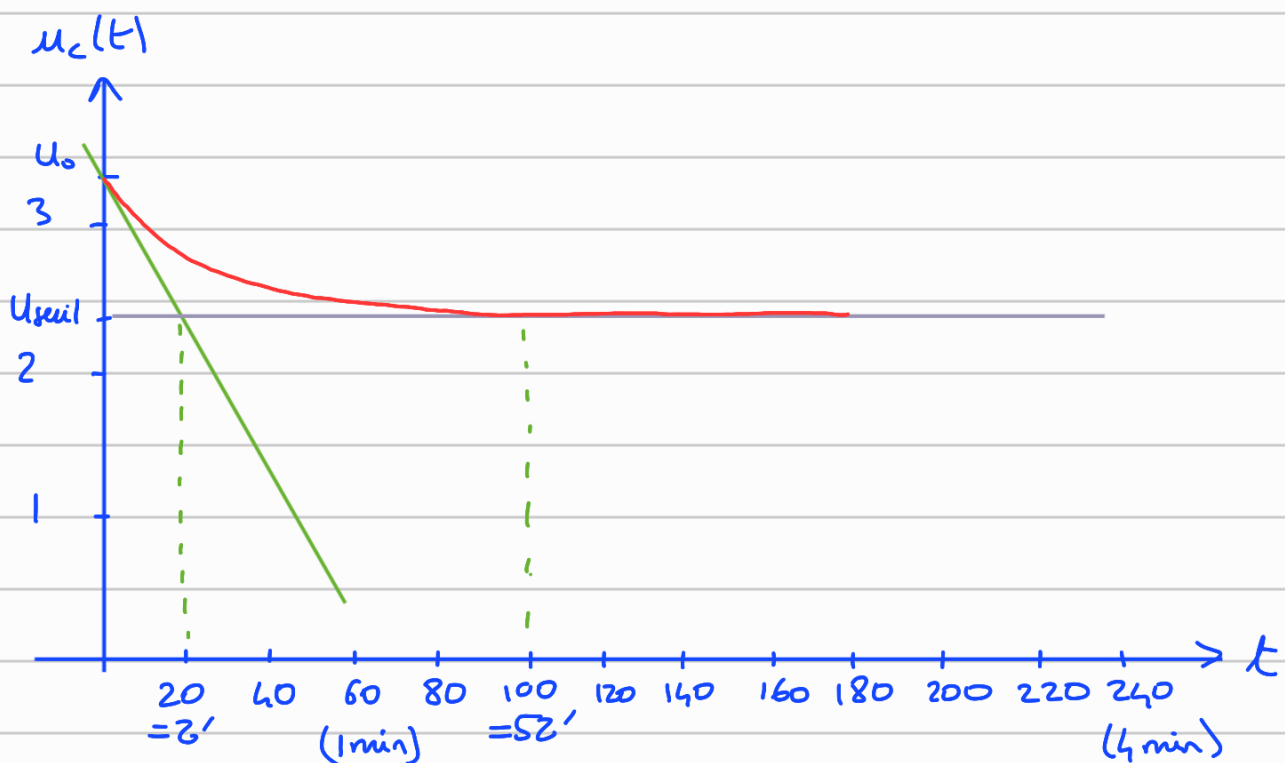
\* Tangente à l'origine :  $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{0+} = (U_{seuil} - U_0) \times \frac{1}{\tau'}$

avec  $U_{seuil} = 2,3V$ ,  $U_0 = 3,3V$  et  $\tau' = 2.10 = 20s$

$$\Rightarrow \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{0+} = -\frac{1}{20} = -0,05.V.s^{-1} = -3.V.min^{-1}$$

Equation de la tangente en O :  $y = U_0 + \frac{U_{seuil} - U_0}{\tau'} t$   
 Pour  $t = \tau'$   $y = U_{seuil}$

\* Asymptote :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_c(t) = U_{seuil}$



Q11.  $i(t) = -C \frac{du_c}{dt} = -C \times \left(-\frac{1}{\tau'}\right) (U_0 - U_{seuil}) e^{-t/\tau'}$

$$i(t) = \frac{U_0 - U_{seuil}}{R'} e^{-t/\tau'}$$

$$Q12 \quad i(0) = \frac{U_0 - U_{\text{seuil}}}{R'} > 0 \quad (\text{AN } i(0) = 500 \text{ mA})$$

pente de la tangente à l'origine :  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = -\frac{1}{\tau'} \cdot \frac{U_0 - U_{\text{seuil}}}{R'}$   

$$= \frac{U_{\text{seuil}} - U_0}{R'^2 C} < 0$$

Équation de la tangente à l'origine :  

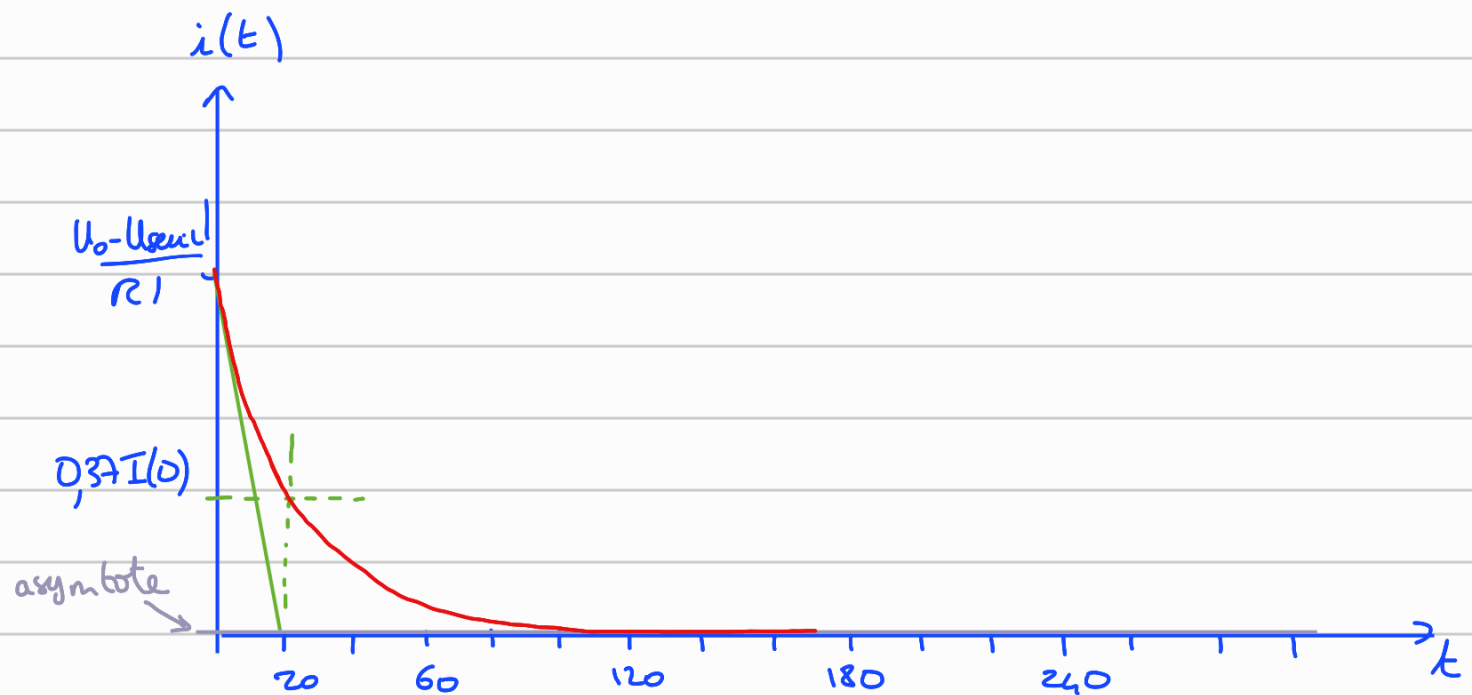
$$y = \frac{U_{\text{seuil}} - U_0}{R'^2 C} t + \frac{U_0 - U_{\text{seuil}}}{R'} = \frac{U_{\text{seuil}} - U_0}{R'} \left( \frac{t}{\tau'} - 1 \right)$$

Pour  $t = \tau' \quad y(\tau') = 0$

asymptote :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0$

(rq :  $\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{U_0 - U_{\text{seuil}}}{R'} \left( \frac{1}{\tau'^2} \right) e^{-t/\tau'}$  ne change  
 pas de signe  $\Rightarrow$  pas de point d'inflexion).

Valeur particulière :  $i(\tau') = I(0) e^{-1} \approx 0,37 I(0)$



Q13. Sur la figure 3 on lit une valeur  $I_{\max} = 250 \text{ mA}$  pour la LED.  
Or  $i(0) = 500 \text{ mA} \Rightarrow$  il y a donc un risque d'endommager la LED.

Une solution pour diminuer le courant est de rajouter une résistance  $R''$  en série après la LED.  
Pour diviser le courant par deux on choisit  $R'' = R' = 2 \Omega$ .

Q14. On cherche  $t_1$  tel que  $u(t_1) = U_{\text{seuil}} + 0,1 \text{ V}$

$$U_{\text{seuil}} + 0,1 = U_{\text{seuil}} + (U_0 - U_{\text{seuil}}) e^{-t_1/\tau'}$$

$$\Rightarrow e^{-t_1/\tau'} = \frac{0,1}{U_0 - U_{\text{seuil}}} \quad \text{avec } U_0 - U_{\text{seuil}} = 1 \text{ V}$$

on obtient  $\boxed{t_1 = \tau' \ln 10}$  soit  $t_1 = \underline{46 \text{ s}}$

Q15 \* Energie initiale dans le condensateur :

$$E_i = \frac{1}{2} C U_0^2$$

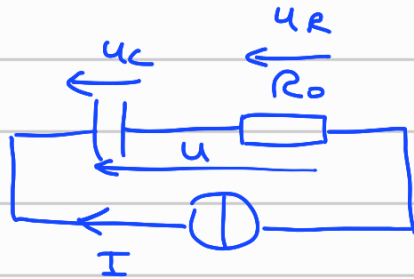
\* Energie à la date  $t_1$  (extinction) :

$$E_f = \frac{1}{2} C (U_{\text{seuil}} + 0,1)^2$$

Soit un pourcentage  $\left( \frac{U_{\text{seuil}} + 0,1}{U_0} \right)^2 \times 100 = \underline{53\%}$

## Partie II

Q16. La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.  
donc  $u_c(0^-) = u_c(0^+)$ .



$$u = u_R + u_c = R_0 I + u_c$$

$$\text{à } t=0^- : u(0^-) = R_0 I(0^-) + u_c(0^-)$$

$$\text{à } t=0^+ : u(0^+) = R_0 I(0^+) + u_c(0^+)$$

En combinant ces deux relations :

$$u(0^+) - u(0^-) = R_0 (I(0^+) - I(0^-))$$

$$R_0 = \frac{u(0^+) - u(0^-)}{I(0^+) - I(0^-)}$$

AN: on lit sur le graphique  $u(0^+) = V_2 = 2,95 \text{ V}$   
 $u(0^-) = V_N = 3,00 \text{ V}$   
 $I(0^+) = -33 \text{ A}$   
 $I(0^-) = 0 \text{ A}$

$$R_0 = \frac{2,95 - 3,00}{-33 - 0} = \underline{\underline{1,5 \cdot 10^{-3} \Omega}}$$

Q16.  $i_c = C \frac{du_c}{dt}$

$$\int_{0^+}^{T^-} i_c dt = \int_{0^+}^{T^-} C_o \frac{du_c}{dt} dt = C_o [u_c]_{0^+}^{T^-} = C_o (u_c(T^-) - u_c(0^+))$$

Avec  $u_c(T^-) = u(T^-) - R_o I(T^-) = V_3 - R_o I$   
 $u_c(0^+) = u(0^+) - R_o I(0^+) = V_2 - R_o I$

$$\Rightarrow \int_{0^+}^{T^-} i_c dt = C_o (V_3 - V_2)$$

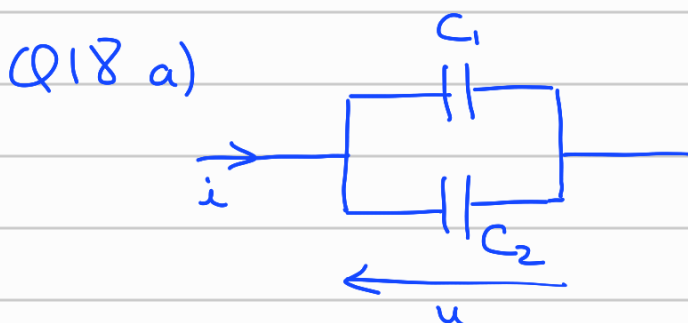
D'autre part  $i_c = \text{cte} = I$  entre  $t=0^+$  et  $T^-$

$$\Rightarrow \int_{0^+}^{T^-} i_c dt = I \cdot T$$

$$\Rightarrow \boxed{C_o = \frac{I \cdot T}{V_3 - V_2}}$$

AN :  $C_o = \frac{-33.14,5}{1,50 - 2,95} = \underline{\underline{330 \text{ F}}}$

$\Rightarrow$  valeur cohérente avec celle écrite sur le condensateur en photo sur la figure 5.

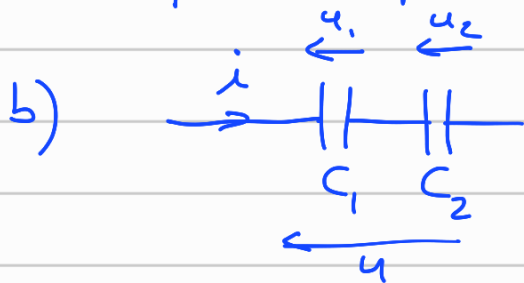


loi des nœuds :  $i = i_1 + i_2$   
 loi intensité-tension :  
 $i = C \frac{du}{dt}$  (conv. récepteur)

$$\Rightarrow i = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt}$$

On pose  $C_p = C_1 + C_2 \Rightarrow i = C_p \frac{du}{dt}$

L'association de deux condensateurs de capacités respectives  $C_1$  et  $C_2$  en parallèle est équivalente à un condensateur de capacité  $C_p = C_1 + C_2$ .



Par additivité des tensions :

$$u = u_1 + u_2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt}$$

En injectant la loi intensité-tension des condensateurs :

$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} = i \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\Rightarrow i = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \frac{du}{dt}, \text{ en posant } \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

on obtient  $i = C_s \frac{du}{dt}$

L'association de deux condensateurs de capacités respectives  $C_1$  et  $C_2$  en série est équivalente à un condensateur de capacité  $C_s$  tel que  $\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Q19. En supposant que toute l'énergie fournie par les supercondensateurs est utilisée pour franchir la dénivellé (= on néglige les pertes par frottements, et on suppose que la totalité de l'énergie électrique est convertie en énergie mécanique, l'énergie à fournir est  $E = mgh$  avec  $m = m_{\text{cycliste}} + m_{\text{vélo}}$  et  $h = \text{dénivellé}$

Cette énergie provient des supercondensateurs et du cycliste, et on a  $\frac{E_{\text{pack}}}{E_{\text{cycliste}}} = 0,50$ .

$$\text{or } E_{\text{pack}} + E_{\text{cycliste}} = E$$

$$\Rightarrow E_{\text{pack}} \left(1 + \frac{1}{0,50}\right) = mgh \Rightarrow E_{\text{pack}} = \frac{mgh}{3}$$

Or chaque condensateur peut fournir l'énergie  $E_1 = \frac{1}{2} C_0 V_N^2 - \frac{1}{2} C_0 u_f^2$

$$\text{avec } u_f = \frac{V_N}{2} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} C_0 V_N^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$E_1 = \frac{3}{8} C_0 V_N^2$$

$$\text{Au total il faut donc } \frac{mgh}{3E_1} = \frac{8mgh}{9C_0 V_N^2}$$

condensateurs pour apporter l'énergie nécessaire.

$$\text{AN : } \frac{8 \cdot 100 \cdot 981 \cdot 60}{9 \cdot 330 \cdot 30^2} = 18 \text{ condensateurs}$$

La tension nominale d'un condensateur étant  $V_n = 3V$ , il faut une association en série pour avoir une tension suffisante aux bornes du moteur avec  $\frac{36}{3} = 12$  condensateurs en série au moins.

On ne peut donc pas brancher les supercondensateurs en parallèle, il faut les brancher en série.

Lorsque les 18 condensateurs sont chargés, il faudra réduire la tension d'un facteur  $\frac{3 \times 18}{36} = 1,5$  et lorsqu'ils seront déchargés

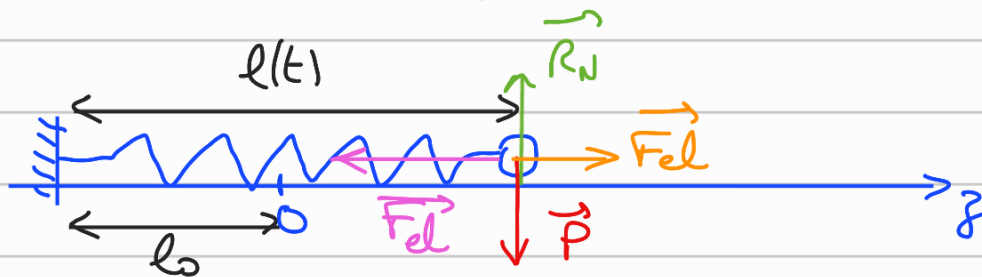
(à moitié) il faudra multiplier la tension par un facteur  $\frac{36}{1,5 \cdot 18} = \frac{4}{3} \sim 1,33$ .



### Exercice 3 :

Q1. La force  $\vec{f}$  modélise les frottements fluides exercées par le fluide (l'air) au contact des branches du diapason.  
Cette force est dissipative donc son travail fait diminuer l'énergie mécanique du système.  
Pour que le travail de la force soit négatif, celle-ci doit être de sens opposé au mouvement.

Q2. On étudie le système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.



Bilan des actions mécaniques:

- \* poids :  $\vec{P} = m\vec{g}$
- \* réaction normale :  $\vec{R}_N$
- \* force de rappel élastique :  $\vec{F}_{el} = -k(l-l_0)\vec{u}_{el}$   
avec  $\vec{u}_{el}$  = vecteur unitaire dans le sens de l'allongement du ressort. Avec le repère choisi  $\vec{u}_{el} = \vec{u}_z$  et  $l-l_0 = z$   
 $\rightarrow \vec{F}_{el} = -kz \vec{u}_z$

\* force de frottement fluide :  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$   
le mouvement étant selon la direction  
(Oz)  $\vec{f} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$

D'après le principe fondamental de la  
dynamique :  $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$

En projetant dans la direction  $\vec{u}_z$  :

$$\vec{P} \cdot \vec{u}_z + \vec{R}_N \cdot \vec{u}_z + \vec{F}_{el} \cdot \vec{u}_z + \vec{f} \cdot \vec{u}_z = m \vec{a} \cdot \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow -kz - \lambda \dot{z} = m \ddot{z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0}$$

Q3. Par identification avec la forme  
canonique  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{on a } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \text{et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \end{array} \right\} \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}}$$

Q4. Polynôme caractéristique :  
 $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$\text{Discriminant : } \Delta = \left(\frac{\omega_0}{\varphi}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4\varphi^2} - 1\right)$$

En régime pseudo périodique  $\Delta < 0$  et les racines sont imaginaires :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2\varphi} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\varphi^2}}$$

On a alors

$$z(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} \left( A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \right)$$

$$\text{avec } \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\varphi^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4km}}$$

$$\text{et } \frac{\omega_0}{2\varphi} = \frac{\lambda}{2m}$$

$$z(t) = e^{-\frac{\lambda t}{2m}} \left( A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}} t \right) \right)$$

Q5. D'après l'énoncé  $\Omega \approx 500 \text{ Hz}$

D'où  $T \approx 2 \text{ ms} \ll 30 \text{ s}$  donc le nombre d'oscillations est très élevé.

$$\text{On a donc } \Omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{et } k \approx m \omega_0^2 \text{ avec } \omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

$$k = 4\pi^2 f_0^2 m.$$

$$\text{AN: } k = 4\pi^2 \cdot 500^2 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = \underline{3 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}}$$

Pour un ressort utilisé en TP, on a à l'équilibre.

$$F_{el} = P$$

$$k \Delta l = mg \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{\Delta l}}$$

$$\text{AN: } k = \frac{10^{-1} \cdot 10}{10^{-1}} = 10$$

$\Rightarrow$  le diapasen a une constante de raideur  $3 \cdot 10^5$  fois plus élevée que celle des ressorts usuels.

$$\text{Q6. On a } \zeta = \frac{2Q}{\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0 \zeta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \pi f_0 \zeta}$$

$$\text{AN avec } f_0 = 500 \text{ Hz et } 5\zeta = 30 \text{ s} \Rightarrow \zeta = 6 \text{ s}$$

$$Q = \pi \cdot 500 \cdot 6 = 9425 \approx \underline{9 \cdot 10^3}$$

b) Pour le système {masse - ressort} de TP on a:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } 5\zeta = 10 \text{ T}$$

$$\Rightarrow T = 0,5 \zeta$$

avec  $\zeta = \frac{2Q}{\omega_0}$  et  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\Omega}$

Soit  $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \Leftrightarrow \frac{Q}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

$$Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 2\pi$$

$$\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} = 2\pi$$

$$Q^2 = 4\pi^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$Q = \sqrt{4\pi^2 + \frac{1}{4}}$$

$Q = 6$

c) Dans les deux cas le facteur de qualité est supérieur est très supérieur à  $\frac{1}{2}$ , mais la valeur est très largement supérieure pour le diapason, on aura donc beaucoup plus d'oscillations avant le retour à l'équilibre.

Q7.  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  donc  $f = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Pour le diapason  $Q \gg \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$

Avec un développement limité à l'ordre 1 :

$$f \approx f_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$$

Pour  $Q = 9000$  on peut affirmer  $f = f_0$ .

De même  $T = T_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$

Avec  $Q=6$  pour le ressort de TP on a bien  $Q \gg \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$

$$\Rightarrow \boxed{T \approx 1 + \frac{1}{8Q^2}} \quad \text{AN: } T = 1 + \frac{0.5}{4 \cdot 36} \approx \underline{\underline{1.003 \text{ s}}}$$

l'erreur commise est de l'ordre de 0,3%  
 $\Rightarrow$  très bonne approximation aussi

Q8. On a les relations 
$$\begin{cases} \frac{2Q}{\omega_0} = \tau \\ \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \Omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4Q^2 = \tau^2 \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\tau^2 \omega_0^2}} = \frac{2\pi}{T}$$

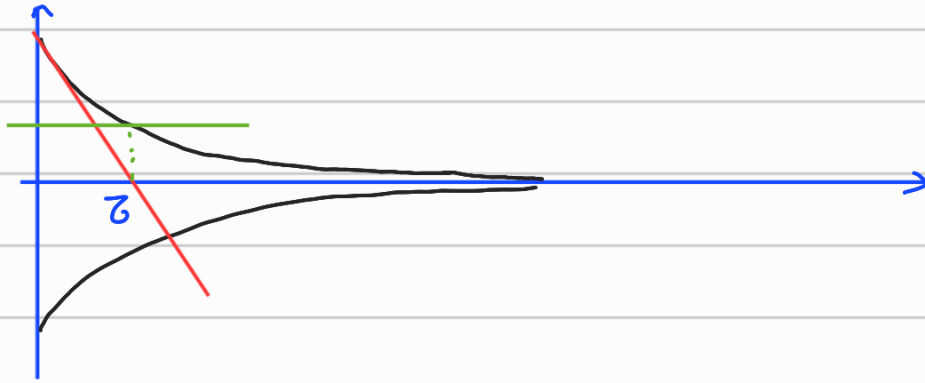
$$\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{\tau^2}}}$$

$$\text{Et } Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{2\pi}{T \sqrt{1 - 1/4Q^2}} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{\pi \cdot \tau}{T \sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

$$T \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} = \pi \tau \quad \Rightarrow \quad Q^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{\pi \tau}{T}\right)^2$$

$$\boxed{Q = \sqrt{\left(\frac{\pi \tau}{T}\right)^2 + \frac{1}{4}}}$$

On lit  $\bar{z}$  avec la tangente à l'origine  
ou avec  $0,37 \times$  valeur maximale :  $\bar{z} \approx 1,85$ .



Sur la 2<sup>ème</sup> courbe on lit  $11T = 0,025 \text{ s}$   
 $\Rightarrow T = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$$\text{AN : } \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{(2,27 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{1}{1,8^2}} = 2768 \text{ rad.s}^{-1}$$

(Soit  $f_0 = 4,4 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ )

$$Q = \sqrt{\left(\frac{\pi \cdot 1,8}{2,27 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 2,5 \cdot 10^3$$

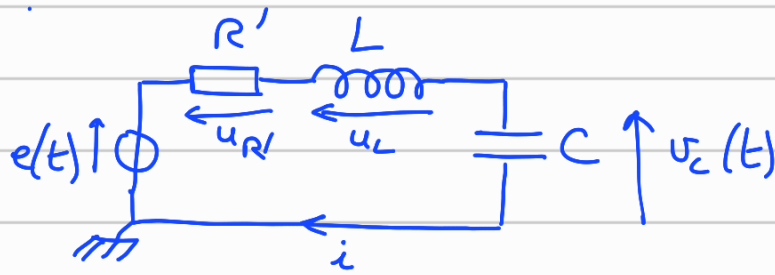
On a un très bon accord pour la fréquence propre, mais le facteur de qualité est plus faible.

Cette différence peut provenir du fait que l'estimation à l'oreille est moins précise (capteur moins sensible).

La caisse de résonance, en augmentant l'émission sonore accélère aussi l'atténuation.

## Exercice 4 :

Q1. En posant  $R' =$  résistance totale du circuit, on a :



La loi des mailles donne :

$$u_C + u_L + u_{R'} = e(t) = 0 \text{ en régime libre}$$

Avec la loi d'Ohm ( $u_{R'} = R'i$ ) et la loi

tension intensité de la bobine ( $u_L = L \frac{di}{dt}$ ) on

obtient 
$$0 = u_C + L \frac{di}{dt} + R'i$$

Avec la loi tension-intensité du condensateur  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , on obtient :

$$0 = u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R'C \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{Soit } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R'}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

On pose  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R'}{L}$  et  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , ce qui

permet d'obtenir la forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0}$$



Q2.  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  soit  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Q3. Pour  $Q > \frac{1}{2}$  le polynôme caractéristique de cette équation différentielle a un discriminant négatif et admet 2 racines complexes :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La partie imaginaire est la pulsation  $\omega$  des oscillations :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Soit  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Q3. En remplaçant  $T_0$  et  $Q$  par leurs expressions on a :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}$$

Soit  $T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot LC}{1 - \frac{R'^2 C}{4L}}$  qui peut se

mettre sous la forme  $T^2 = \frac{a \cdot C}{1 - bc}$  en

posant  $a = 4\pi^2 L$  et  $b = \frac{R'^2}{4L}$

Q4. La modélisation affine est bien ajustée avec les données et l'ordonnée à l'origine est très faible (relation quasiment linéaire). On peut donc supposer que le terme  $bc$  est très petit devant 1, et on a alors  $T^2 \approx a \cdot C$ .

Avec les données fournies sur la pente, on peut écrire :  $4\pi^2 L = 3,3$

soit  $L = \frac{3,3}{4\pi^2} = 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ H}$

soit  $L \approx 84 \text{ mH}$

Pour que l'hypothèse  $bc \ll 1$  soit vérifiée il faut  $\frac{R'^2}{4L} C \ll 1$  soit  $R' \ll \sqrt{\frac{4L}{C}}$

AN:  $R' \ll \sqrt{\frac{4 \cdot 8,4 \cdot 10^{-2}}{10^{-6}}}$  soit  $R' \ll 600 \Omega$

Q5. En régime critique  $Q = \frac{1}{2}$  soit

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2\omega_0 = \frac{R'_c}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

on a donc  $\frac{R'_c}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \boxed{R'_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Q6. Courbe 3 : régime pseudo-périodique (1 oscillation)  
Courbe 1 : régime aperiodique (décroissance monotone)  
Courbe 2 : régime critique (retour le plus rapide à  $v_c(\infty)$ )

Q7.  $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R_g - r$

Donc la représentation graphique de  $R_c$  en fonction de  $\frac{1}{\sqrt{C}}$  est une droite de pente  $2\sqrt{L}$  et d'ordonnée à l'origine  $-R_g - r$ .

Donc  $-R_g - r = -81 \, \Omega \Rightarrow R_g + r = 81 \, \Omega$

Or d'après l'énoncé  $R_g = 50 \, \Omega$   
on a donc  $\boxed{r = 31 \, \Omega}$