

Devoir surveillé n° 3

Durée : 4 heures

Préambule : Exemple d'en-tête de concours

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est recommandé de lire le texte en entier. L'usage de la calculatrice est autorisé. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Plan :

Ce problème se compose de 4 exercices indépendants :

- L'exercice 1 porte sur un dispositif de guirlandes de Noël.
- L'exercice 2 s'intéresse à deux exemples d'application des supercondensateurs.
- L'exercice 3 propose l'étude d'un diapason modélisé par un oscillateur mécanique amorti.
- L'exercice 4 traite d'un détecteur de métaux constitué d'un circuit RLC .

Exercice 1 : Guirlandes de Noël ($\sim 20\%$)

On cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlandes électriques numérotées 1 et 2 et modélisées par des conducteurs ohmiques de résistances identiques $R_1 = R_2 = R$. La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée avec un interrupteur K en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement. On supposera que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

On considère le circuit ci-dessous, alimenté par un générateur réel de f.e.m. E (avec $E > 0$) et de résistance interne r .

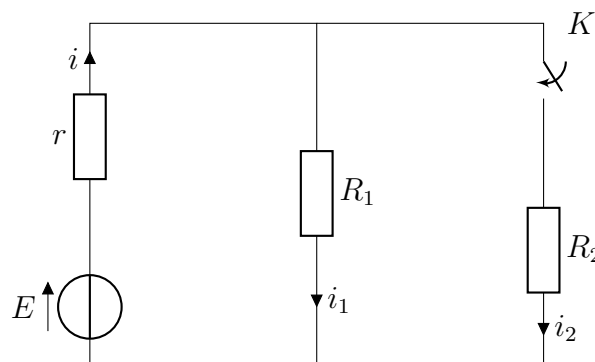


FIGURE 1 – Circuit électrique modélisant 2 guirlandes de Noël

- Q1. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, établir l'expression du courant i_{ouvert} en fonction de E , r et R . Puis, déterminer l'expression de la puissance électrique $P_{1,\text{ouvert}}$ reçue par la guirlande R_1 . Quelle est dans cette configuration la puissance reçue $P_{2,\text{ouvert}}$, reçue par la seconde guirlande R_2 ?
- Q2. On considère maintenant le cas où l'interrupteur K est fermé. Quelle est alors la nouvelle expression pour le courant $i_{\text{fermé}}$? En déduire les courants $i_{1,\text{fermé}}$ et $i_{2,\text{fermé}}$ circulant dans les deux guirlandes.
- Q3. Quelles sont alors les puissances $P_{1,\text{fermé}}$ et $P_{2,\text{fermé}}$ reçues par les deux guirlandes ?
- Q4. La puissance reçue par la première guirlande (celle qui ne doit pas clignoter) est-elle identique lors des deux régimes étudiés ? Interpréter ce résultat, sachant que la puissance lumineuse produite par une guirlande est proportionnelle à la puissance électrique qu'elle reçoit..
- Q5. Comment doit-on choisir r par rapport à R pour limiter cet effet ? Cette condition est-elle vérifiée pour $r = 1\ \Omega$ et $R = 2\ \Omega$?

On cherche à optimiser le circuit représenté sur la figure 1 en ajoutant une bobine d'inductance L dans la branche de la guirlande 1 (voir figure 2). On rappelle que la guirlande 1 (modélisée par R_1) est dédiée à un fonctionnement continu alors que la guirlande 2 (modélisée par R_2), associée à un interrupteur K en série qui bascule de manière périodique, produit un clignotement.

L'interrupteur K est ouvert de manière périodique pour $t \in [0, \frac{T}{2}[$ et fermé pour $t \in [\frac{T}{2}, T[$.

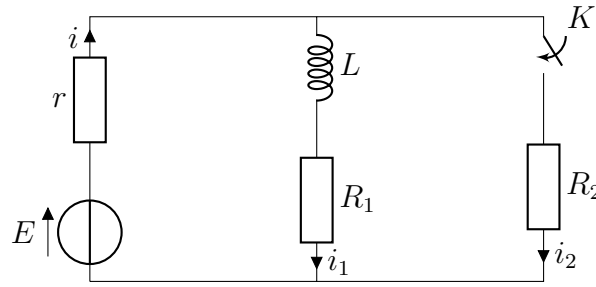


FIGURE 2 – Circuit électrique optimisé

Q6. On s'intéresse à l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$, lorsque l'interrupteur est ouvert :

- Établir l'équation différentielle dont i_1 est solution sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$. On fera apparaître un temps caractéristique τ_o .
- Vérifier ensuite que l'ajout de la bobine ne va pas modifier la valeur du courant i_1 en régime permanent (continu). Pour pouvoir comparer, on prendra comme valeur de référence (sans bobine) $i_{1,\text{ouvert}} = \frac{E}{R + r}$.

Q7. On s'intéresse maintenant à l'intervalle $[\frac{T}{2}, T]$, lorsque l'interrupteur est fermé.

- Montrer que i_1 est alors solution de l'équation : $\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L \left(1 + \frac{r}{R}\right)}$

On donnera l'expression de τ_f en fonction de L , R et r .

- Vérifier ensuite que l'ajout de la bobine ne va pas modifier la valeur du courant i_1 en régime permanent (continu). Pour pouvoir comparer, on prendra comme valeur de référence (sans bobine) $i_{1,\text{fermé}} = \frac{E}{R + 2r}$.

Q8. On étudie ensuite expérimentalement les variations du courant i_1 en mesurant la tension aux bornes de la guirlande R_1 à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant pour deux valeurs différentes de l'inductance L :

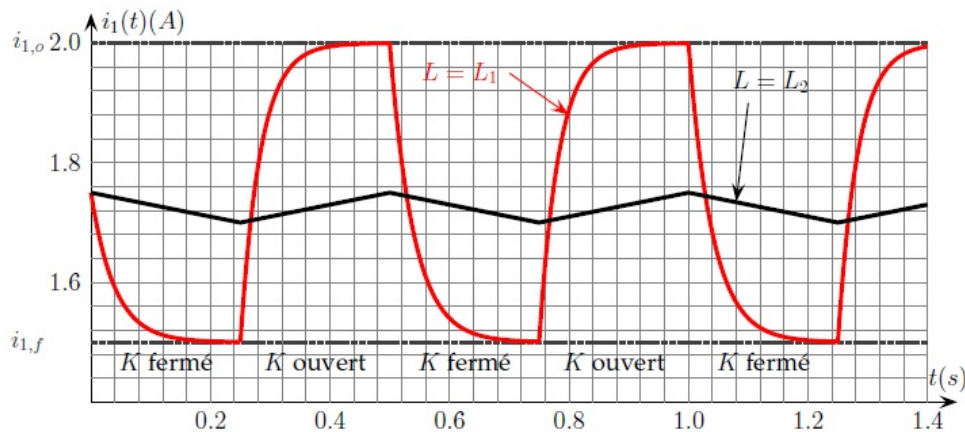


FIGURE 3 – Intensité du courant dans la branche de la guirlande 1 pour deux valeurs d'inductance

Déterminer la valeur de L_1 à partir de l'étude graphique (on rappelle que $r = 1 \Omega$ et $R = 2 \Omega$). La démarche devra être clairement expliquée.

- Justifier ensuite qualitativement que $L_2 \gg L_1$ (sans chercher à déterminer la valeur de L_2), ainsi que l'allure de la courbe pour cette valeur L_2 .
- Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi L_1 ou L_2 pour minimiser les variations du courant passant dans la première guirlande ? Justifier soigneusement la réponse.

Exercice 2 : Deux applications des supercondensateurs ($\sim 40\%$)

Cet exercice est adapté des épreuves CCINP 2022 filière TSI (partie I) et CCS 2025 filière PSI (partie II).

Les supercondensateurs sont conçus pour stocker et restituer rapidement de l'énergie électrique, en quantité bien supérieure aux condensateurs usuels et avec des temps de réponse et des puissances échangées bien meilleurs que ce que permettent les batteries électrochimiques classiques.

Partie I. Durée d'éclairage d'une lampe de secours

Pour être vu en cas de détresse ou tout simplement pour se déplacer par nuit noire à l'intérieur ou sur le pont d'un bateau, il est recommandé d'avoir à bord une lampe. Pour ne pas avoir à gérer des piles défaillantes ou des accumulateurs non chargés, une « lampe à secouer » peut s'avérer utile. Un extrait d'une description publicitaire de cet objet est rapporté ci-dessous.

Document 1: Extrait d'une publicité pour une lampe à secouer



En secouant la lampe 30 secondes (un peu comme une bombe de peinture), de l'énergie électrique est produite et stockée dans un condensateur. Vous obtenez alors environ 20 minutes d'une lumière produite par une DEL (diode électroluminescente).

Si vous n'utilisez pas toute l'énergie produite, elle restera stockée dans le condensateur pendant plusieurs semaines pour être ensuite immédiatement disponible sur simple pression du bouton marche/arrêt.

Le circuit électrique modélisant une telle lampe est représenté par le schéma de la figure 1 (la partie de circuit utile lors de la phase de charge du condensateur n'est pas représentée, et le conducteur ohmique représente une ampoule à incandescence). On va étudier la décharge de ce condensateur de capacité $C = 10\text{ F}$ (« supercondensateur ») dans le conducteur ohmique de résistance R .

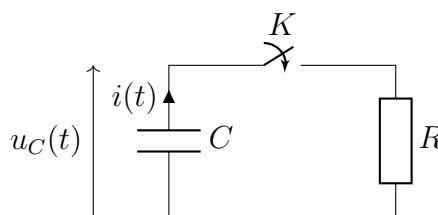


FIGURE 1 – Circuit électrique équivalent lors de la phase de décharge du condensateur

On considère une situation initiale où le condensateur vient d'être chargé et que la tension à ses bornes est $U_0 = 3,3\text{ V}$.

À l'instant initial $t_0 = 0\text{ s}$, on ferme l'interrupteur K et la décharge commence.

Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pendant la décharge en faisant apparaître une constante de temps τ dont on donnera l'expression.

Q2. Déterminer l'expression littérale de la solution de cette équation différentielle.

Au bout d'une durée environ égale à 5τ , la décharge du condensateur est quasi-complète.

- Q3. Si l'on considère que cette durée est égale à 20 minutes, déterminer la valeur de la résistance R du conducteur ohmique qu'il faut alors associer au condensateur de capacité $C = 10 \text{ F}$.
- Q4. Dans le cadre du modèle du condensateur plan, quels seraient les paramètres géométriques du condensateur à modifier pour obtenir la capacité la plus grande possible ?

Certains modèles électriques plus élaborés du « super-condensateur » utilisé ici permettent de traduire, plus fidèlement à la réalité, son comportement réel dans un circuit. Un des modèles possibles fait apparaître, autour de la capacité C , une résistance R_f en parallèle et une résistance série R_s conformément au schéma de la figure 2 ci-dessous :

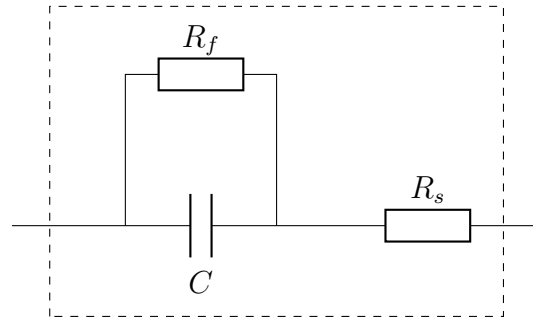


FIGURE 2 – Modèle plus fidèle à la réalité pour le « super-condensateur »

- Q5. Dans cette application de stockage et de restitution d'énergie, faut-il R_s la plus grande ou la plus petite possible ? Justifier.
- Q6. Même question pour R_f .

Pour la suite des questions, on revient à un modèle plus simple (C seul) pour le condensateur, toujours initialement chargé sous une tension $U_0 = 3,3 \text{ V}$.

On remplace maintenant le conducteur ohmique de résistance R par une DEL dont les caractéristiques sont les suivantes :

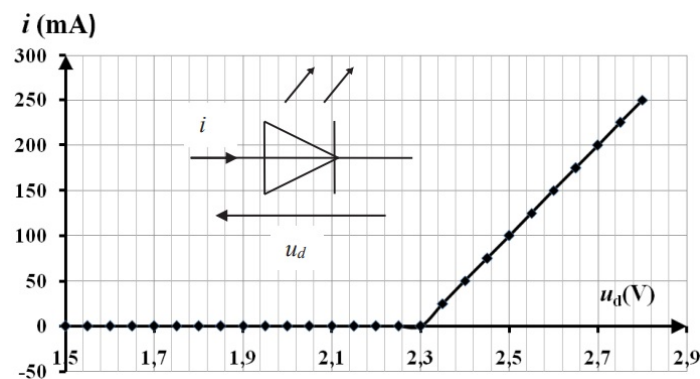


FIGURE 3 – Caractéristique $i = f(u_d)$ pour la diode électroluminescente DEL

Pour cette diode, on appelle U_{seuil} la tension minimale au-delà de laquelle la diode devient passante, et on note i_{max} le courant maximal qu'elle peut supporter lorsqu'elle est passante.)

Q7. Proposer un modèle électrique équivalent pour la DEL lorsqu'elle est passante (schéma et valeurs numériques du modèle attendus). Pour cela on pourra d'abord écrire relation $u_d = f(i)$. On pourra nommer R' une éventuelle résistance présente dans le modèle.

Q8. Montrer alors, en justifiant par un schéma, que la nouvelle équation différentielle régissant l'évolution de $u_c(t)$ lorsque le condensateur se décharge dans la diode électroluminescente est :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau'} = \frac{U_{\text{seuil}}}{\tau'}$$

Préciser l'expression de τ' .

Q9. Déterminer la solution $u_c(t)$ de cette nouvelle équation différentielle.

Q10. Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de $u_c(t)$ en mettant en évidence les points importants du graphe (valeur et tangente à l'origine ainsi que asymptote éventuelle).

Q11. Déterminer l'expression littérale de $i(t)$.

Q12. Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de $i(t)$ en mettant en évidence les points importants.

Q13. Le fonctionnement correct de la DEL est-il garanti sans dommage ? Proposer une solution pour éventuellement remédier au problème rencontré (valeur numérique attendue).

On convient alors que la DEL cesse d'émettre suffisamment de lumière dès que :

$$u_d < U_{\text{seuil}} + 0,1 \text{ V}$$

Q14. Prévoir, sans la mise en œuvre de la solution précédente, la durée approximative d'éclairage de cette lampe.

Q15. Exprimer, en fonction de U_0 et de $U_{\text{fin}} = U_{\text{seuil}} + 0,1 \text{ V}$, le pourcentage d'énergie restante dans le condensateur lorsque la DEL cesse d'émettre de la lumière par rapport à l'énergie initiale accumulée, et montrer qu'il vaut environ 50%.

Partie II. Dimensionnement du pack de supercondensateurs d'un vélo

Certains vélos électriques sont équipés, en plus des batteries, de supercondensateurs qui permettent une meilleure récupération et restitution de l'énergie.

Contrairement aux condensateurs usuels dont le temps de charge (ou de décharge) est essentiellement gouverné par la résistance du circuit extérieur, le temps de réponse des supercondensateurs, et donc la puissance maximale qu'ils peuvent délivrer, est dû à des processus (non étudiés ici) de déplacement d'ions au sein de l'électrolyte présent entre les armatures. Pour en tenir compte, on modélise le supercondensateur par l'association d'un condensateur de capacité C_0 en série avec une résistance R_0 . Pour déterminer expérimentalement les paramètres R_0 et C_0 , on réalise le montage représenté ci-après (figure 4a) dans lequel le supercondensateur (encadré en pointillés) est associé en série à une source idéale. On réalise un test de caractérisation dans lequel l'intensité I varie avec le temps comme indiqué sur la figure 4b.

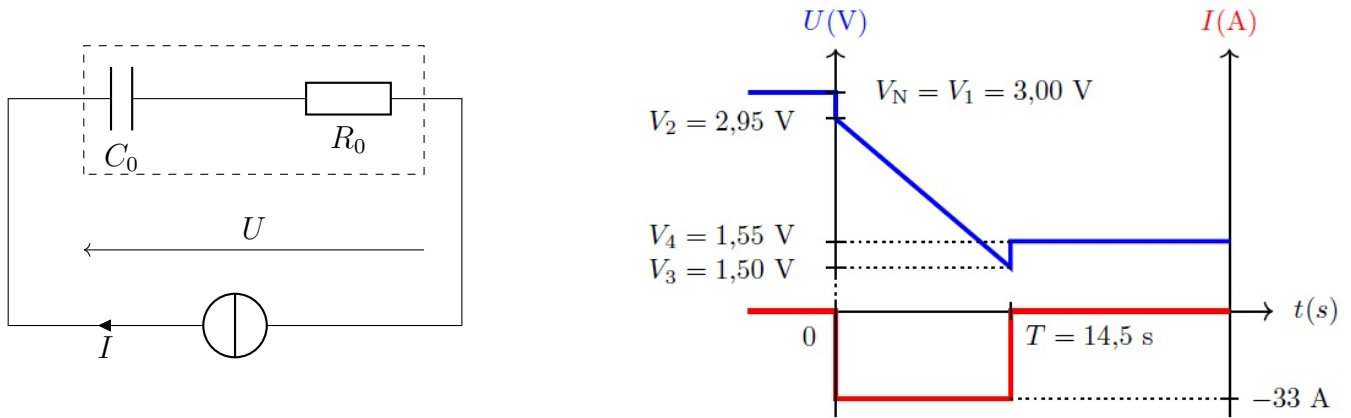


FIGURE 4 – a) Montage expérimental pour l'étude des caractéristiques du supercondensateur
b) Test de caractérisation en décharge. La courbe du haut représente les variations de la tension U et celle du bas les variations de l'intensité I . V_N est la tension nominale d'une cellule (= la tension maximale que l'association C_0 et R_0 peut supporter sans risquer d'être endommagée).

- Q16. Citer et exploiter une propriété de la tension aux bornes d'un condensateur pour déterminer la résistance R_0 . On donnera une expression littérale de R_0 et on calculera sa valeur numérique grâce aux données de la figure 4.
- Q17. Donner la loi intensité-tension du condensateur en convention récepteur. L'intégrer entre $t = 0^+$ et $t = T^-$ (voir figure 4) pour déterminer la capacité du condensateur C_0 . On donnera une expression littérale de C_0 , on calculera sa valeur numérique grâce aux données de la figure 4 et on vérifiera avec la mention figurant sur la figure 5.
- Q18. Lois d'association de condensateurs :
- Démontrer avec rigueur que la capacité C_p de l'association parallèle de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 vaut $C_1 + C_2$.
 - Démontrer avec rigueur que la capacité C_s de l'association série de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 vérifie $\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Bien que les supercondensateurs puissent être totalement déchargés, il est d'usage de ne pas les décharger complètement au cours de leur utilisation. En effet, les faibles niveaux de tension ainsi que les forts courants associés (à puissance constante) peuvent complexifier la gestion du pack. Classiquement, la valeur minimale de tension est choisie à la moitié de la valeur nominale.



Masse	70 g
Hauteur	62,7 mm
Diamètre	35,2 mm
Courant maximal	33 A

FIGURE 5 – Un supercondensateur et ses caractéristiques

Le pack de supercondensateurs doit satisfaire aux exigences suivantes :

- le pack alimente un moteur de 250 W sous une tension de 36 V ;
- le pack de supercondensateurs doit permettre de franchir des dénivelés de 60 m avec un niveau d'assistance faible de 50% (rapport de l'énergie fournie par le pack sur l'énergie fournie par le cycliste). Cela permet à un cycliste de 80 kg de se déplacer dans la grande majorité des villes de France avec un vélo électrique pesant 20 kg.
- Pour palier aux variations de tension aux bornes des supercondensateurs, un dispositif (non étudié ici) permet d'augmenter ou de réduire la tension aux bornes du pack, dans la limite d'un facteur 1,5 (au maximum $\times 1,5$ en augmentation et $\div 1,5$ en réduction).

Q19. En explicitant les hypothèses simplificatrices réalisées, estimer le nombre de condensateurs que le pack doit comporter pour répondre aux exigences en respectant les contraintes mentionnées. Préciser l'assemblage nécessaire (on ne considérera que les associations du même type : soit tous les supercondensateurs du pack branchés en série, tous les supercondensateurs du pack branchés en parallèle).

Exercice 3 : Étude d'un diapason ($\sim 25\%$)

Cet exercice est adapté de l'épreuve E3A Polytec 2022.

Ce problème porte sur l'étude de la réponse percutielle d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique : le diapason.



FIGURE 1 – à gauche : diapason de musicien ; à droite : diapason (avec son marteau) muni d'une caisse de résonance pour améliorer l'émission sonore, utilisé dans l'enseignement

Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en la vitesse.

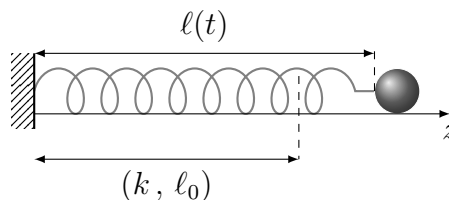


FIGURE 2 – Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal. La coordonnée z repère la position de l'extrémité gauche de la masselotte sur l'horizontale

On note m la masse de la masselotte, k la constante de raideur du ressort linéaire équivalent, ℓ_0 sa longueur à vide et $\ell(t)$ sa longueur à l'instant t (voir figure 2). De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

Q1. Quel phénomène physique la force \vec{f} modélise-t-elle ? Justifier par un argument énergétique le signe de la constante λ .

À l'instant $t = 0$, on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour $t > 0$. Une note est alors émise.

Q2. On note $z(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masselotte. Établir l'équation différentielle dont $z(t)$ est solution pour $t > 0$.

Q3. Exprimer la fréquence propre et le facteur de qualité Q de ce système en fonction de k , m et λ .

- Q4. Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression littérale de $z(t)$ en fonction de k , m et λ et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de 500 Hz vaut 30 g. Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

- Q5. Réaliser une estimation de la constante de raideur du ressort équivalent (valeur numérique donnée à 1 chiffre significatif). Comparer avec la constante de raideur d'un ressort utilisé en travaux pratiques, qui s'allonge d'une dizaine de centimètres lorsqu'on lui suspend une masse d'une centaine de grammes.
- Q6. (a) Proposer une estimation du facteur de qualité du diapason (valeur numérique donnée à 1 chiffre significatif).
 (b) Proposer une estimation du facteur de qualité d'un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques, pour lequel la période propre vaut une seconde et une dizaine d'oscillations sont observables avant le retour à l'équilibre (valeur numérique donnée à 1 chiffre significatif).
 (c) Commenter ces valeurs.
- Q7. (a) Indiquer s'il est correct d'affirmer que les branches d'un diapason de fréquence propre f_0 oscillent à la fréquence f_0 après percussion.
 (b) Pour l'oscillateur masse-ressort utilisé en TP, la durée entre deux maxima successifs de la position de la masselotte vaut-elle effectivement T_0 ?

Outil mathématique : développement limité à l'ordre 1 : $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ pour $x \ll 1$

Pour préciser l'estimation précédente du facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore (voir schéma du montage, figure 3). On obtient les deux enregistrements présentés sur la figure 4.

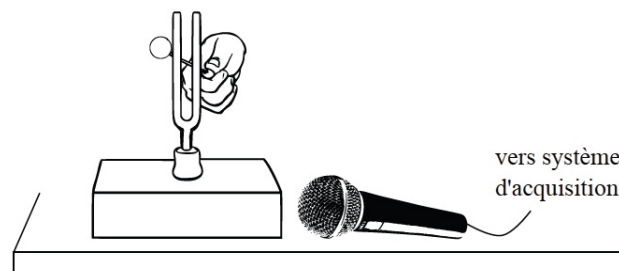


FIGURE 3 – Schéma du dispositif expérimental étudié dans la question Q9

- Q8. Exploiter la figure 4 pour estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason (reproduire sommairement la/les figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations). Comparer la valeur du facteur de qualité mesuré en présence de la caisse de résonance à celui du diapason en son absence. Commenter.

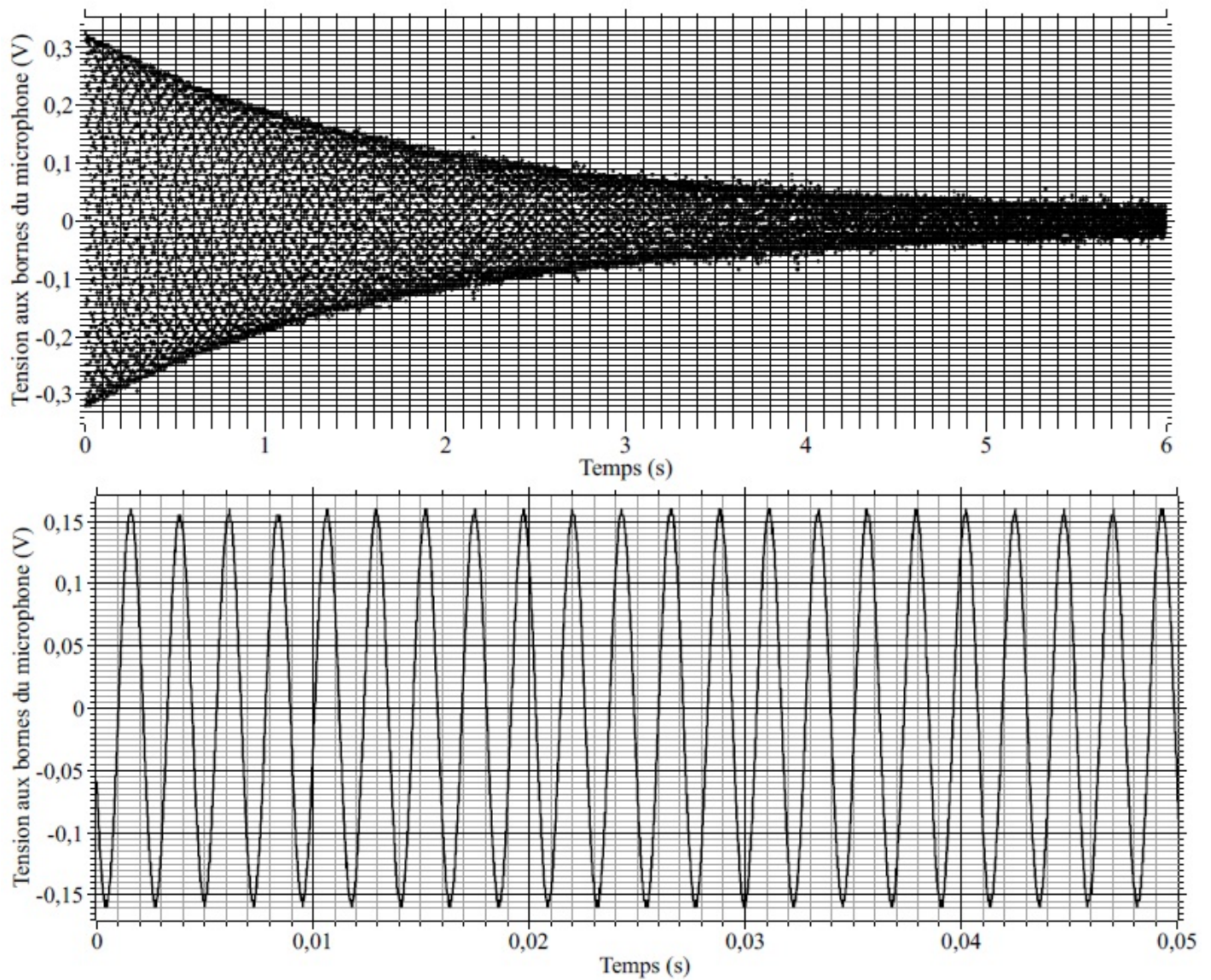


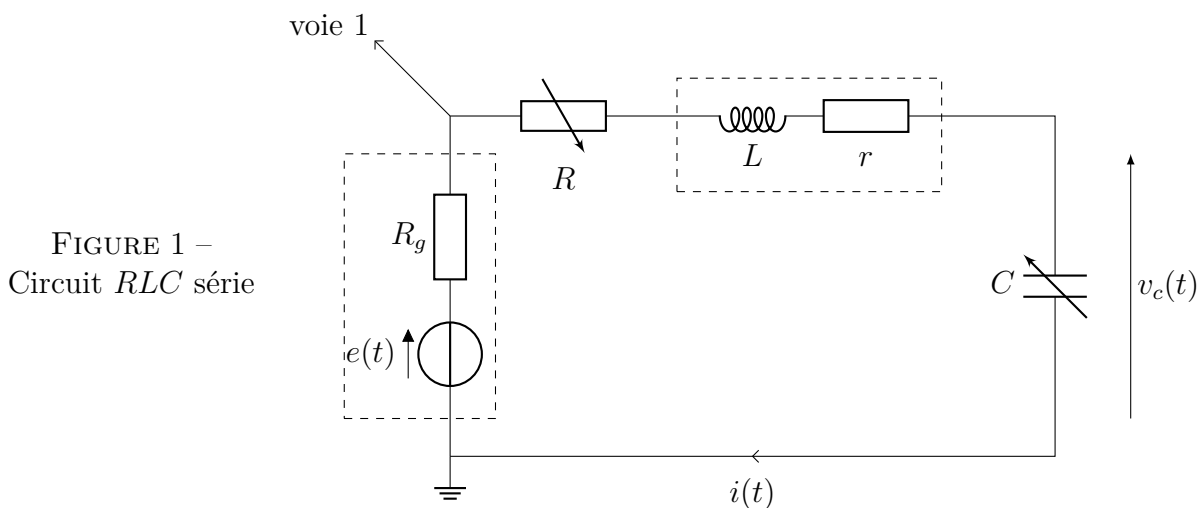
FIGURE 4 – Étude de la réponse percussionnelle : Tension aux bornes d'un microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason en réponse à une percussion avec le marteau (lors de deux mesures)

Exercice 4 : Principe de fonctionnement d'un détecteur de métaux ($\sim 10\%$)

Les détecteurs de métaux fonctionnent selon des principes variés dépendant de l'utilisation souhaitée. Dans cet exercice, nous allons nous intéresser aux détecteurs de métaux basés sur le battement de fréquence. L'élément déterminant d'un tel détecteur de métal est la bobine, indispensable à la détection, qui est utilisée dans un montage oscillateur. L'étude du fonctionnement de l'oscillateur va nous permettre de déterminer les caractéristiques de la bobine.

On réalise un circuit RLC série dont le schéma est donné sur la figure 1. Il est constitué :

- d'un générateur de tension de résistance interne $R_g = 50\,\Omega$ et de force électromotrice $e(t)$;
- d'une résistance variable R , de valeur comprise entre $0\,\Omega$ et $10,0\,\text{k}\Omega$;
- d'un condensateur de capacité variable C , de valeur comprise entre $0,01\,\mu\text{F}$ et $1,00\,\mu\text{F}$;
- d'une bobine réelle d'inductance L et de résistance r inconnues



On pose $R' = R + R_g + r$ la résistance totale du circuit.

Pour les questions 1 à 5, on s'intéresse au régime libre, c'est à dire $e(t) = 0$.

Q1. Montrer qu'en régime libre, l'équation différentielle satisfaite par la tension v_c aux bornes du condensateur se met sous la forme :

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_c}{dt} + \omega_0^2 v_c = 0$$

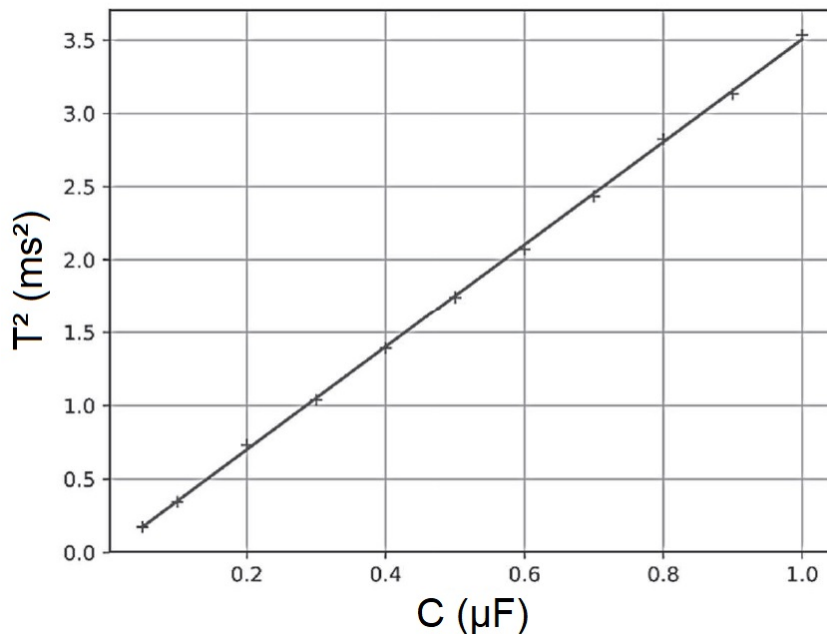
Préciser les expressions de ω_0 et Q .

On suppose que $Q > \frac{1}{2}$.

Q2. Déterminer l'expression littérale de la période propre T_0 en fonction des paramètres du circuit.

Q3. Montrer que la pseudo-période des oscillations peut se mettre sous la forme $T^2 = \frac{aC}{1 - bC}$, avec a et b des constantes que l'on exprimera en fonction des caractéristiques du circuit.

La pseudo-période a été mesurée pour différentes valeurs de la capacité C ; la fonction T^2 a été tracée en fonction de C . Une modélisation affine a été superposée à ces données.



Modélisation affine :

- coefficient de corrélation : 0,999
- ordonnée à l'origine : -3×10^{-9} SI
- pente : 3,3 SI

FIGURE 2 – Carré de la pseudo-période en fonction de la capacité

Q4. En déduire la valeur de l'inductance de la bobine en expliquant la démarche et en justifiant d'éventuelles approximations.

On appelle résistance critique totale, $R'_c = R_c + R_g + r$, la valeur de la résistance totale du circuit permettant d'atteindre le régime critique, la résistance R_c étant simplement appelée résistance critique. Aucune hypothèse n'est faite sur la valeur de Q .

Q5. Montrer que la résistance critique totale vaut $R'_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Q6. Tous les autres paramètres étant fixés, la réponse du circuit à un échelon de tension donne lieu à différents régimes selon la valeur de la résistance variable R . Identifier et nommer les trois régimes associés aux courbes 1, 2 et 3 de la figure 3 en justifiant.

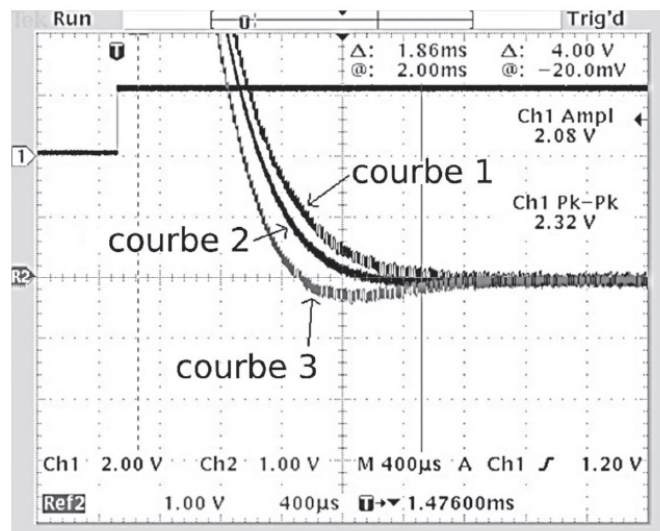
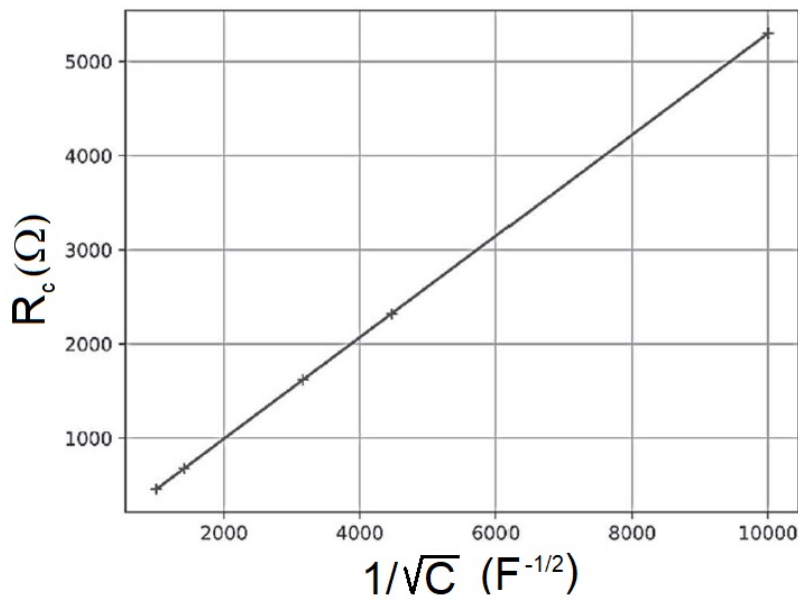


FIGURE 3 – Courbes 1, 2, 3 : Évolution de la tension v_C lorsque le circuit est soumis à un échelon de tension (visible en haut de l'écran), pour trois valeurs différentes de R .

Q7. La résistance critique $R_c = R'_c - R_g - r$ a été mesurée pour différentes valeurs de C . Déduire du tracé de R_c en fonction de $\frac{1}{\sqrt{C}}$ (figure 4) une estimation de la valeur de r .



Modélisation affine :

- coefficient de corrélation : 0,999
- ordonnée à l'origine : -81 SI
- pente : $0,58 \text{ SI}$

FIGURE 4 – Résistance critique en fonction de l'inverse de la racine carré de la capacité