

DS n° 2

Exercice 1 :

Partie I (1)

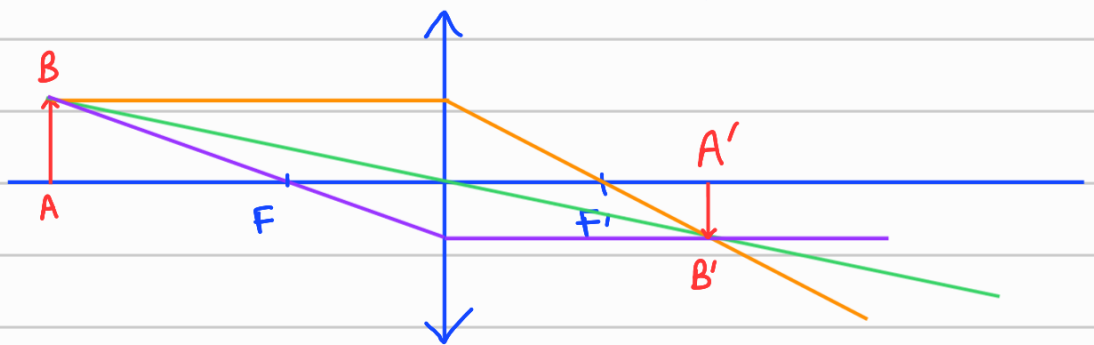
Q1 a) les conditions de Gauss sont remplies si :

- * les rayons sont proches de l'axe optique
- * les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.

Dans ces conditions, le système optique satisfait le stigmatisme et l'aplanétisme approchés.

b) C'est le diaphragme placé avant la lentille qui permet d'assurer que les conditions de Gauss sont remplies.

Q2. a)



b) D'après la formule du grandissement : $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Et avec la relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA}'} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{OA}'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA}' = \frac{\overline{OA} \cdot f'}{\overline{OA} + f'}$$

$$\text{d'où } \overline{A'B}' = \overline{AB} \times \frac{\overline{OA} \times f'}{\overline{OA} + f'} \times \frac{1}{\overline{OA}} = \overline{AB} \times \frac{f'}{\overline{OA} + f'}$$

$$\text{D'après l'énoncé } \overline{AB} = h ; \overline{OA} = -L$$

$$\text{Soit } \boxed{\overline{A'B}' = h \cdot \frac{f'}{f' - L}}$$

$$\text{AN : } \overline{A'B}' = 5,0 \times \frac{50 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3} - 20} = -1,3 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \underline{\underline{-13 \text{ mm}}}$$

Q3. a) Lorsque l'objet est à l'infini, son image se forme dans le plan focal image de la lentille donc $\boxed{d = f'}$

b) Pour un objet à l'infini, l'image se forme dans le plan focal image. Lorsque l'objet se rapproche, l'image se forme plus loin de la lentille. Or le capteur ne peut pas être placé au delà de $d_{\max}$. Cela impose donc une valeur $L_{\min}$ telle que l'on ne peut pas photographier un objet situé à $L < L_{\min}$.

c) D'après la relation de conjugaison et $d_{\min} < \overline{OA}' < d_{\max}$

$$\frac{1}{d_{\max}} \leq \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} \leq \frac{1}{d_{\min}}$$

$$\frac{1}{d_{\max}} - \frac{1}{f'} \leq \frac{1}{\overline{OA}} \leq \frac{1}{d_{\min}} - \frac{1}{f'}$$

$$\frac{f' \cdot d_{\min}}{f' - d_{\min}} \leq \overline{OA} \leq \frac{f' \cdot d_{\max}}{f' - d_{\max}}$$

or $\overline{OA} = -L$ d'où $\frac{f' \cdot d_{\max}}{d_{\max} - f'} \leq L \leq \frac{f' \cdot d_{\min}}{d_{\min} - f'}$

d'où
$$L_{\min} = \frac{f' \cdot d_{\max}}{d_{\max} - f'}$$

d) AN: $L_{\min} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 55 \cdot 10^{-3}}{55 \cdot 10^{-3} - 50 \cdot 10^{-3}} = 0,55 \text{ m} = \underline{\underline{55 \text{ cm}}}$

On ne peut pas photographier les objets qui sont placés à moins de 55 cm de la lentille.

Partie I (2)

Q4 On reprend la formule : $\overline{A'B'} = \frac{h f'}{f' - L}$

AN: $\overline{A'B'} = \frac{5,0 \times 100 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3} - 20} = -2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \underline{\underline{-25 \text{ mm}}}$

$$24 \text{ mm} < |\overline{A'B'}| < 36 \text{ mm}$$

donc il sera possible de photographier l'arbre en entier à condition de mettre l'appareil en orientation "portrait" (pas "paysage").

Q5. D'après la formule $\overline{A'B'} = \frac{h f'}{f' - L}$

on a $\overline{A'B'} \approx \frac{h \cdot f'}{L}$ lorsque $L \gg f'$.

Donc $\overline{A'B'}$ est constant si f'/L est constant pour un objet de même taille h .

En prenant $f'_1 = 2f'$ on a : $\frac{f'_1}{L_1} = \frac{2f'}{L_1} = \frac{f'}{L_1/2}$

Ainsi l'image obtenue avec un téléobjectif de focale $f'_1 = 2f'$ fait la même taille que celle obtenue avec une focale f' et un objet placé à une distance moitié $L_1/2$.

Cela permet d'expliquer l'expression "le téléobjectif rapproche les objets".

Q6. a) $AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'B'$

On fait l'hypothèse que $\overline{OA_1} = f'_1$

(objet très éloigné de $\mathcal{L}_1$: $|\overline{OA_1}| \gg f'_1$)

on a donc $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F'_1} = f'_1$ d'où $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_2A_1} = f'_1 - e}$$

b) $A'B'$ est réelle si $\overline{O_2A'} > 0$

$$\text{Or } -\frac{1}{\overline{O_2A_1}} + \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{O_2A_1} + f'_2}{f'_2 \cdot \overline{O_2A_1}}$$

$$\overline{O_2 A'} = \frac{f'_2 \cdot \overline{O_2 A_1}}{\overline{O_2 A_1} + f'_2} = \frac{f'_2 (f'_1 - e)}{(f'_1 - e) + f'_2}$$

On étudie le signe de $\overline{O_2 A'}$ en fonction de la valeur de e :

e	$-\infty$	$f'_1 + f'_2$	f'_1	$+\infty$
f'_2	-		-	-
$f'_1 - e$	+		0	-
$f'_1 - e + f'_2$	+	0		-
$\overline{O_2 A'}$	-		+	0

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_2 A'} > 0 \text{ pour } f'_1 + f'_2 < e < f'_1}$$

Rq: autre raisonnement possible: explique qu'une lentille divergente donne une image réelle d'objets placés entre son centre optique et son foyer objet.

c) Avec les valeurs données $f'_1 + f'_2 = 5 \text{ cm}$ donc pour $e = 8 \text{ cm}$ la condition $f'_1 + f'_2 < e < f'_1$ est bien respectée.

Q7. a) $d = \overline{O_1 A'} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A'}$

$$\boxed{d = e + \frac{f'_2 (f'_1 - e)}{f'_1 - e + f'_2}}$$

AN: $d = 80 + \frac{-5,0(100-80)}{100-80-5,0} = \underline{\underline{11 \text{ cm}}}$

b) D'après la formule du grandissement pour $\mathcal{L}_2$, on a :

$$\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1} \times \frac{\overline{O_2A'_1}}{\overline{O_2A_1}} \quad \text{avec} \quad \overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}$$

et $\overline{O_1A_1} = f'_1$ avec l'hypothèse d'objet éloigné

$$\text{et} \quad \overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = h \cdot \frac{f'_1}{-L}$$

$$\text{soit} \quad \overline{A'B'} = -h \frac{f'_1}{L} \times \frac{f'_2 (f'_1 - e)}{f'_1 - e + f'_2} \times \frac{1}{-e + f'_1}$$

$$\boxed{\overline{A'B'} = \frac{h \cdot f'_1 \cdot f'_2}{L(e - f'_1 - f'_2)}}$$

$$\text{AN: } \overline{A'B'} = \frac{5,0 \times 9100 \times (-0,050)}{20(0,080 - 9100 + 0,050)} = -4,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \underline{\underline{-42 \text{ mm}}}$$

c) Avec le téléobjectif à 2 lentilles, l'image mesure 42 mm sur le capteur pour un encombrement de 11 cm, alors qu'avec 1 seule lentille, on avait une image de 25 mm pour un encombrement de 10 cm (= distance focale).

Ce téléobjectif permet donc une image 1,7 fois plus grande pour un encombrement assez similaire.

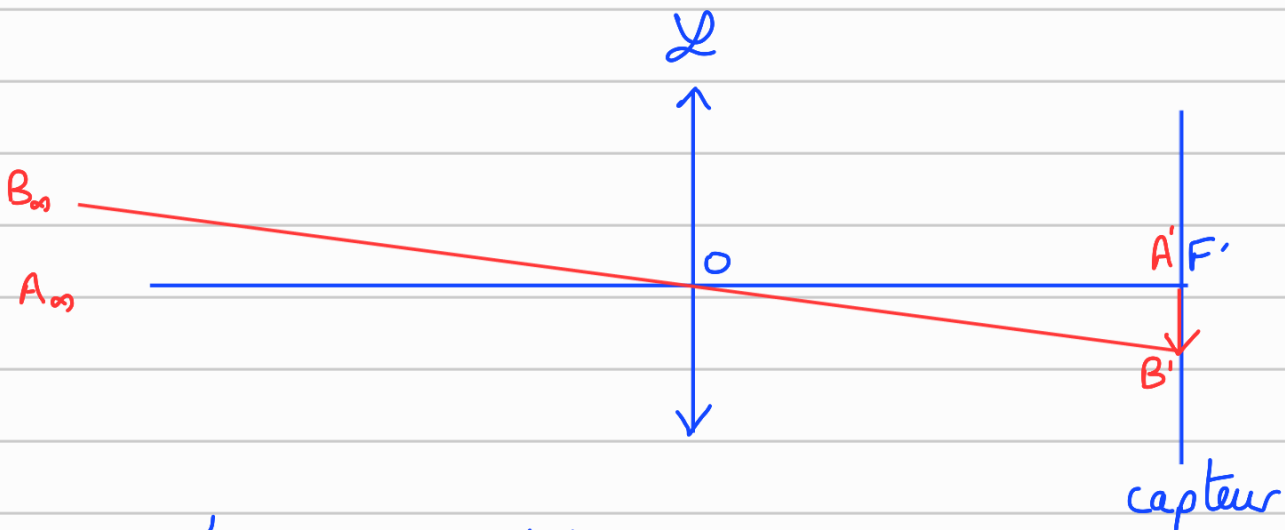
Partie I ③

Q8. En utilisant la photo, on détermine la taille de $A'B'$ sur le capteur :

échelle : $8,8 \text{ cm}$ sur la photo $\Leftrightarrow 7,6 \text{ mm}$ sur le capteur
 $2,3 \text{ cm} \quad \Leftrightarrow ?$

$$A'B' = \frac{2,3 \times 7,6}{8,8} = 2,0 \text{ mm.}$$

$\overline{A'B'} = -2,0 \text{ mm}$ car l'image d'un objet réel par une lentille convergente est renversée :



D'après la relation du grandissement :

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

Et avec la relation de conjugaison :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'}, \quad \text{soit} \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OA}}{f'} + 1$$

On obtient : $\boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'} \times \left(\frac{\overline{OA}}{f'} + 1 \right)}$

AN : $\overline{AB} = -2,0 \cdot 10^{-3} \times \left(\frac{-1460}{18 \cdot 10^{-3}} + 1 \right) = 1,6 \cdot 10^2 \text{ m} = \underline{160 \text{ m}}$

Le Pont Saint Michel s'élève à 160 m.

Partie II ①

Q9. a) En passant d'une ouverture $f/8$ à $f/4$ la surface du disque du diaphragme est multipliée par 4

$\Rightarrow$ Il faut donc diviser la durée d'exposition par 4, c'est à dire passer à $1/1000 \text{ s}$.

b) En passant de $f/8$ à $f/4$ l'ouverture est plus grande donc la profondeur de champ diminue.

c) En diminuant la durée d'exposition, il y a moins de risque de "bougé", donc il y a moins de risque d'avoir une photo floue.

Partie II ②

Q10. $\boxed{\nu = \frac{c}{\lambda}}$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \nu = \text{réquence de la radiation en Hz} \\ \lambda = \text{longueur d'onde de la radiation en m} \\ c = \text{célérité en m.s}^{-1} \end{array} \right.$

Q11 . $n_{ph} = \frac{E_{tot}}{h\nu}$ or $\nu = \frac{c}{\lambda}$ et

on connaît l'éclairement (= puissance par unité de surface: P_s) donc on peut déterminer E_{tot} :

$$E_{tot} = P_s \times \Delta t \times S$$

Soit
$$n_{ph} = \frac{P_s \times \Delta t \times S \times \lambda}{hc}$$

AN:
$$n_{ph} = \frac{700 \times 1/500 \times \pi \times (5 \cdot 10^{-3})^2 \times 600 \cdot 10^{-19}}{4.663 \cdot 10^{-26} \cdot 300 \cdot 10^8}$$

$$n_{ph} = \underline{8 \cdot 10^{13} \text{ photons}}$$

Ce sont donc $8 \cdot 10^{13}$ photons qui arrivent sur le capteur à chaque prise de vue.

Exercice 2 :

Q1. 2 est l'ordre partiel par rapport au réactif E133
 β est l'ordre partiel par rapport au réactif ClO^- (ions hypochlorite)

L'ordre global de la réaction est $2 + \beta$.

Q2. Faire le blanc consiste à enlever l'absorbance due aux éléments communs à toutes les mesures (cuve, solvant...)

Q3. On utilise la spectrophotométrie car une des espèces chimiques mises en jeu est colorée. Le suivi de l'absorbance au cours du temps permet donc de suivre l'évolution de la transformation chimique.
De plus c'est une technique qui ne détériore pas les espèces chimiques, et le résultat de la mesure est directement proportionnel à la concentration de l'espèce étudiée.

Q4. Loi de Beer-Lambert : $A = \epsilon_{\lambda} \cdot l \cdot C$
avec A = absorbance (sans unité)
 ϵ_{λ} = coefficient d'absorption molaire
en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

l = épaisseur de solution traversée en cm.
 C = concentration molaire de l'espèce chimique qui absorbe en mol.l⁻¹.

Rq: Si plusieurs espèces chimiques absorbent à la longueur d'onde λ : $A = \sum_i \epsilon_{\lambda,i} l \cdot C_i$

Q5 lors d'une dilution : $C_{\text{mère}} \cdot V_{\text{mère}} = C_{\text{fille}} \cdot V_{\text{fille}}$

$$V_{\text{mère}} = \frac{C_{\text{fille}} \cdot V_{\text{fille}}}{C_{\text{mère}}}$$

AN: $V_{\text{mère}} = \frac{1,89 \cdot 10^{-6} \cdot 250}{4,72 \cdot 10^{-6}} = \underline{100 \text{ mL}}$

Il faut utiliser une pipette jaugée pour prélever ce volume de solution mère.

Q6. Il faut se placer à l'absorbance maximale. Sur le spectre d'absorption on lit $\lambda_{\text{max}} = \underline{630 \text{ nm}}$

Cette longueur d'onde correspond au rouge. La solution apparaît donc de la couleur complémentaire : bleu (cyan).

Q7. Pour tester la validité de la loi de Beer-Lambert on trace à la calculatrice A en fonction de C . On observe que les points sont alignés et que la droite modèle passe par l'origine. Il y a donc bien

proportionnalité entre A et C, la loi de Beer-Lambert est vérifiée pour ces solutions.

Q8. Dans les conditions initiales proposées :

$$\frac{[\text{ClO}^-]_0}{[\text{E133}]_0} = \frac{C_2 V_2}{C_1 V_1} \approx 117$$

Or les coefficients stœchiométriques de ClO^- et E133 sont égaux.

les ions hypochlorite sont donc en très large excès et leur concentration va sensiblement rester constante au cours de la transformation chimique.

On a donc $[\text{ClO}^-] \approx \text{cte}$

$$\text{Donc } v = k_{\text{app}} [\text{E133}]^2 \quad \text{avec } k_{\text{app}} = k \left(\frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2} \right)^2$$

Cette méthode s'appelle la dégénérescence de l'ordre.

Q9. Avec l'hypothèse d'ordre 1 on a l'équation différentielle :

$$v = - \frac{d[\text{E133}]}{dt} = k_{\text{app}} \cdot [\text{E133}]$$

$$\Rightarrow \frac{d[\text{E133}]/dt}{[\text{E133}]} = -k_{\text{app}}$$

$$\Rightarrow \ln [\text{E133}] = -k_{\text{app}} t + \ln [\text{E133}]_0 \Rightarrow \ln \frac{[\text{E133}]_0}{[\text{E133}]} = k_{\text{app}} t$$

E133 étant l'unique espèce colorée
on a $A = \epsilon \cdot l [E133]$.

$$\rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -k_{app} \cdot t}$$

Q10. Avec la calculatrice, on trace $\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$ en fonction du temps.
les points sont alignés et la droite modèle passe par l'origine. La régression linéaire donne :

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -0,278 t - 0,036.$$

Par identification $k_{app} = \underline{0,278 \text{ min}^{-1}}$

Q11. On est toujours dans le cas de la dégénérescence de 1^{er} ordre $\left(\frac{[ClO^-]_0}{[E133]_0} \approx 59\right)$

Et on remarque que $[ClO^-]_0$ est la moitié de sa valeur dans la 1^{ère} expérience ($C_3 = C_2/2$)

$$\text{D'où } k'_{app} = k \left(\frac{C_3 V_2}{V_1 + V_2}\right)^B = k \left(\frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2}\right)^B \cdot \frac{1}{2^B} = k_{app} \cdot 2^{-B}.$$

On détermine k'_{app} en faisant une régression linéaire de $\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$ en fonction du temps.

On obtient $k_{app} = 0,139 \cdot \text{min}^{-1}$

Or le rapport $\frac{k_{app}}{k'_{app}}$ donne 2^β

$$\Rightarrow \frac{0,278}{0,139} = 2 \Rightarrow \underline{\beta = 1}$$

L'ordre partiel par rapport aux ions hypochlorite est 1.

Q13. $k = \frac{k_{app}}{C_2 V_2} (V_1 + V_2)$ AN :

$$\text{AN : } k = \frac{0,278 \cdot 26}{1,33 \cdot 10^{-2} \cdot 1} = \underline{543 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{min}^{-1}}$$

Exercice 3 :

Partie I

Q1. $m_{Ca} = n_{Ca} \times \eta(Ca)$

et on a la stoechiométrie $\frac{n_{Ca}}{3} = n_{Ca_3(PO_4)_2}$

$$\Rightarrow m_{Ca} = 3 \cdot n_{Ca_3(PO_4)_2} \cdot \eta(Ca)$$

$$= 3 \cdot \frac{m_{Ca_3(PO_4)_2}}{\eta_{Ca_3(PO_4)_2}} \cdot \eta(Ca) = 0,25 \times m$$

$$= 3 \cdot \frac{0,25 \cdot m}{\eta_{Ca_3(PO_4)_2}} \cdot \eta(Ca)$$

$$m_{Ca} = 3 \cdot \frac{0,25 \cdot m \cdot \eta(Ca)}{3\eta(Ca) + 2\eta(P) + 8\eta(O)}$$

AN: $m_{Ca} = 3 \cdot \frac{0,25 \cdot 12,0 \cdot 40}{3 \cdot 40 + 2 \cdot 31 + 8 \cdot 16} = \underline{1,16 \text{ kg}}$

Q2. En une année, il faut apporter $0,20 \cdot m_{Ca}$.

Et l'apport d'un volume quotidien V_q vaut:

$$m_{\text{année}} = 365 \cdot C_m \cdot V_q$$

$$\Rightarrow V_q = \frac{0,20 m_{Ca}}{365 \cdot C_m}$$

AN: $V_q = \frac{0,20 \cdot 1,16 \cdot 10^3}{365 \cdot 1110 \cdot 10^{-3}} = \underline{0,573 \text{ L}}$

Partie II

$$Q3. K^{\circ}(T) = Q_{\text{eq}}(T) = \frac{a(\text{CaO}(s)) \cdot a(\text{CO}_2(g))}{a(\text{CaCO}_3(s))} = \frac{1 \cdot P_{\text{CO}_2\text{eq}}/P^{\circ}}{1}$$

$$K^{\circ}(T) = \frac{P_{\text{CO}_2\text{eq}}}{P^{\circ}}$$

avec $P_{\text{CO}_2\text{eq}}$ = pression partielle en CO_2 à l'équilibre (bar)
 P° = pression de référence = 1,0 bar.

Q4.

	ξ	$\text{CaCO}_3(s)$	$=$	$\text{CaO}(s)$	$+ \text{CO}_2(g)$
EI	0	0,10		0	0
EF	ξ_{eq}	$0,10 - \xi_{\text{eq}}$		ξ_{eq}	ξ_{eq}

$$\text{D'où } K^{\circ}(1100) = \frac{\xi_{\text{eq}} RT}{V P^{\circ}} \Rightarrow \xi_{\text{eq}} = \frac{K^{\circ}(1100) \cdot P^{\circ} \cdot V}{RT}$$

$$\text{AN: } \xi_{\text{eq}} = \frac{0,20 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{8,315 \cdot 1100} = \underline{2,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}}$$

A l'équilibre, le système est composé de :

ξ_{eq} mol de $\text{CaO}(s)$, ξ_{eq} mol de $\text{CO}_2(g)$ et

$0,10 - \xi_{\text{eq}}$ mol de $\text{CaCO}_3(s)$.

$$\text{Et } P = P_{\text{CO}_2} = K^{\circ} \cdot P^{\circ} \quad \text{AN: } \underline{P = 0,20 \text{ bar}}$$

Q5 Pour $V = 100 \text{ L}$, l'AN donne :

$$\xi_{eq} = \frac{0,20 \cdot 10^5 \cdot 10^{-1}}{8314 \cdot 1100} = 2,19 \cdot 10^{-1} \text{ mol}$$

Or on a introduit $0,10 \text{ mol}$ de CaCO_3
 $\Rightarrow$ on prime au maximum $0,10 \text{ mol}$ de CO_2 .

La réaction s'arrêtera lorsque l'avancement
vaudra $\xi_f = 0,10 \text{ mol}$.
(avant d'atteindre l'équilibre)

$$\text{Et on a } P_{\text{CO}_2} = \frac{\xi RT}{V}$$

$$\text{AN: } P_{\text{CO}_2} = \frac{0,10 \cdot 8314 \cdot 1100}{100 \cdot 10^{-3}} = 9,15 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Q6. Tant que l'équilibre existe, la pression
du système à l'état final sera
 $P_{eq} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

Or pour $V > V_{critique}$ l'état final
n'est pas un état d'équilibre (on
a consommé tout le CaCO_3 solide).

$$\text{On a } V_{critique} = \frac{\xi_f RT}{P_{eq}} \quad \text{avec } P_{eq} = P^\circ \cdot K$$

$$\Rightarrow V_{critique} = \frac{\xi_f RT}{P^\circ K} \quad \text{avec } \xi_f = 0,10 \text{ mol}$$

$$\text{AN: } V_{\text{critique}} = \frac{0,10 \cdot 8,314 \cdot 1100}{10^5 \cdot 0,20} = 45,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ = \underline{45,7 \text{ L}}$$

Pour $V > V_{\text{critique}}$, d'après la loi des gaz parfaits :

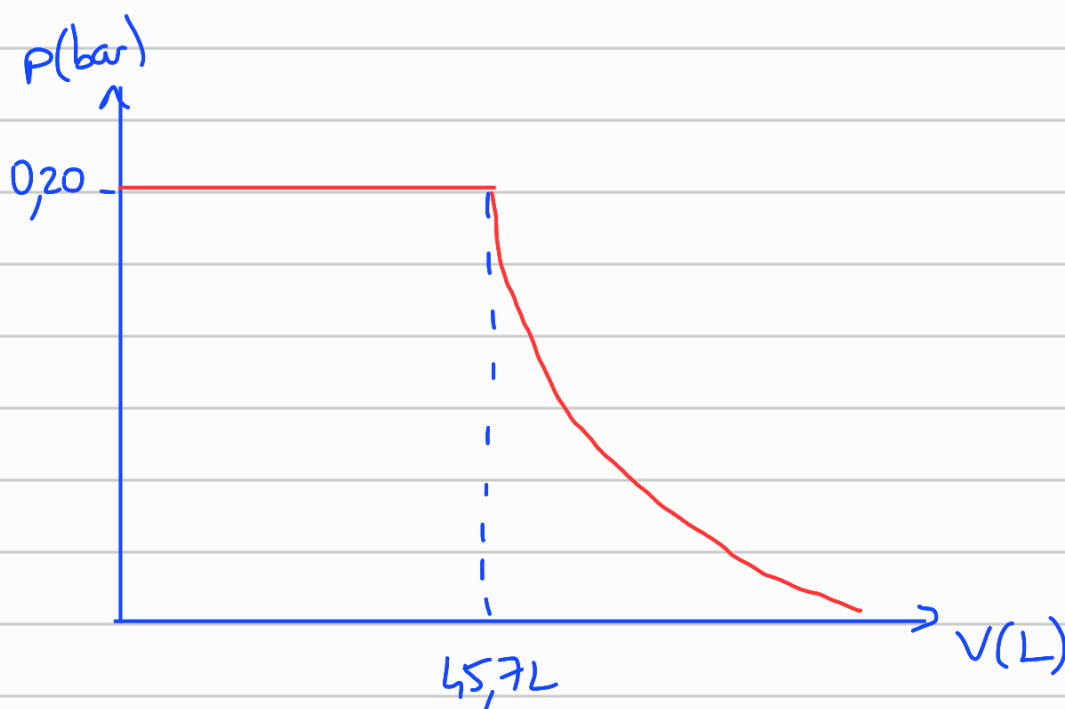
$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\text{AN: } P = 0,10 \cdot 8,314 \cdot 1100 \cdot \frac{1}{V} = \frac{914,54}{V}$$

avec P en Pa et V en m^3

On convertit en bar et en L : $P_b = \frac{P}{10^5}$
et $V_L = 10^3 V$

$$\Rightarrow P_b = \frac{914,54 \cdot 10^{-5}}{V_L \cdot 10^{-3}} = \frac{0,91454}{V_L}$$



Partie III

$$Q7. \quad K^{\circ} = \frac{[Ca^{2+}]_{eq}/C^{\circ} \cdot P_{eq}CO_2/P^{\circ}}{[H_3O^+]_{eq}^2/C^{\circ 2}}$$

L'acidification des océans correspond à une augmentation de $[H_3O^+]$, et entraîne donc la diminution de Q , on a donc $Q < K^{\circ}$. La réaction va donc se produire dans le sens direct, c'est à dire la dissolution de $CaCO_3(s)$ dont est constitué le corail.

Q8. On a $K^{\circ} \gg 10^3$ et $Q = 0$ à l'état initial (pas de produits à l'état initial) $\Rightarrow$ réaction quasi-totale dans le sens $\rightarrow$.

Q9. a) D'après la loi des gaz parfaits:
$$\frac{p_{CO_2} V}{RT} = n(CO_2)$$

b) D'après l'équation-bilan $n(CO_2) = \xi$

c) On calcule :

$$\xi(10s) = \frac{1250 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot 298} = \underline{5,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol}}$$

$$\xi(100s) = \frac{7170 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{8314 \cdot 298} = \underline{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol}}$$

Q10. a) $pH = -\log([H_3O^+]/C^\circ)$

b) D'après l'équation de la réaction

$$n(H_3O^+) = n_0(H_3O^+) - 2\xi$$

$$[H_3O^+](t) = [H_3O^+]_0 - 2\xi/V_0 = c_0 - 2\xi/V$$

avec à l'état initial $[H_3O^+]_0 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

c) $2\xi/V_0 = [H_3O^+]_0 - [H_3O^+](t)$

$$\Rightarrow \xi = \frac{V_0}{2} ([H_3O^+]_0 - [H_3O^+](t)) = \frac{V_0}{2} ([H_3O^+]_0 - 10^{-pH(t)})$$

pour $t = 10 \text{ s}$ $\xi = \frac{0,100}{2} (1,0 \cdot 10^{-1} - 10^{-1,05}) = \underline{5,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol}}$

d) pour $t = 100 \text{ s}$ $\xi = \frac{0,100}{2} (1,0 \cdot 10^{-1} - 10^{-1,38}) = \underline{2,9 \cdot 10^{-4} \text{ mol}}$

Q11. Les 2 méthodes semblent cohérentes, aux incertitudes de mesure près.

Q12 a) $v = -\frac{1}{2} \frac{d[H_3O^+]}{dt}$

b) Hypothèse d'ordre 0 : $v = k[H_3O^+]^0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{d[H_3O^+]}{dt} = k$$

$$\Rightarrow [H_3O^+] = -2kt + [H_3O^+]_0$$

$$\text{Or } [H_3O^+]_0 = c_a$$

$$\text{et } [H_3O^+](t) = c_a - 2\xi/V_0$$

$$\Rightarrow c_a - \frac{2\xi}{V_0} = -2kt + c_a$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = kV_0 t}$$

c) En faisant l'hypothèse d'une réaction d'ordre 2 par rapport à H_3O^+ on a:

$$k[H_3O^+]^2 = -\frac{1}{2} \frac{d[H_3O^+]}{dt}$$

$$\text{Soit } -\frac{d[H_3O^+]/dt}{[H_3O^+]^2} = 2k$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{[H_3O^+]} \right) = 2k$$

$$\frac{1}{[H_3O^+]} = 2kt + \frac{1}{[H_3O^+]_0}$$

$$\text{avec } [H_3O^+](t) = c_a - 2\xi/V_0$$

$$\text{et } [H_3O^+]_0 = c_a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_a - 2\frac{\xi}{V_0}} = 2kt + \frac{1}{c_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c_a V_0 - 2\xi} - \frac{1}{c_a V_0} = \frac{2k}{V_0} t}$$

d) Avec l'hypothèse d'ordre 1, on a l'équation différentielle :

$$k[H_3O^+] = -\frac{1}{2} \frac{d[H_3O^+]}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d[H_3O^+]/dt}{[H_3O^+]} = -2k$$

Après intégration $\ln[H_3O^+] = -2kt + \ln[H_3O^+]_0$

$$\text{Or } [H_3O^+] = c_a - 2\frac{\xi}{V_0}$$

$$\Rightarrow \ln\left(c_a - 2\frac{\xi}{V_0}\right) = -2kt + \ln c_a$$

$$\boxed{f(\xi) = c_a - 2\frac{\xi}{V_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{g(t) = -2kt + \ln c_a}$$

QB. On remarque que la modélisation affine modélise mieux les résultats expérimentaux sur le graphe n°3, qui correspond à l'hypothèse d'ordre 2.

D'après la résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{aV_0 - 2\xi} - \frac{1}{aV_0} = \frac{2k}{V_0} t \quad \text{avec } k \text{ en } \text{mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$$

La pente de la droite modèle vaut donc $\frac{2k}{V_0}$ soit $k = \frac{V_0}{2} \times \text{pente}$

$$\text{AN: } k = \frac{0,100}{2} \times 1,4318 = \underline{7,16 \cdot 10^{-2} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Q14. Au cours du temps on a

$$\frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]_0 - 2\xi/V} - \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]_0} = 2kt$$

$$\text{Or } [\text{H}_3\text{O}^+]_0 \cdot V - 2\xi_{\text{max}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_{\text{max}}}{V} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_0}{2} = \frac{10^{-7}}{2}$$

$$\text{Pour } t = t_{1/2} : \xi = \frac{\xi_{\text{max}}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10^{-7} - \frac{10^{-7}}{2}} - \frac{1}{10^{-7}} = 2kt_{1/2}$$

$$\frac{2}{10^{-7}} - \frac{1}{10^{-7}} = 2kt_{1/2}$$

$$t_{1/2} = \frac{1}{2k \cdot 10^{-7}}$$

$$\text{AN: } t_{1/2} = \frac{1}{2.716 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-7}} = 6,98 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 2,21 \text{ an}$$

$\Rightarrow$ très rapide à l'échelle des temps géologiques

Q15. D'après la loi d'Arrhenius

$$\ln k = -\frac{E_a}{RT} + \ln A.$$

$$\text{d'où } \ln k' = -\frac{E_a}{RT'} + \ln A$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{k}{k'}\right) = -\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right)$$

$$\frac{k}{k'} = e^{-\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right)}$$

$$k' = k e^{\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right)}$$

$$\text{AN: } k' = 7,16 \cdot 10^{-2} e^{\frac{60 \cdot 10^3}{8,314} \left(\frac{1}{273+25} - \frac{1}{273+60}\right)}$$

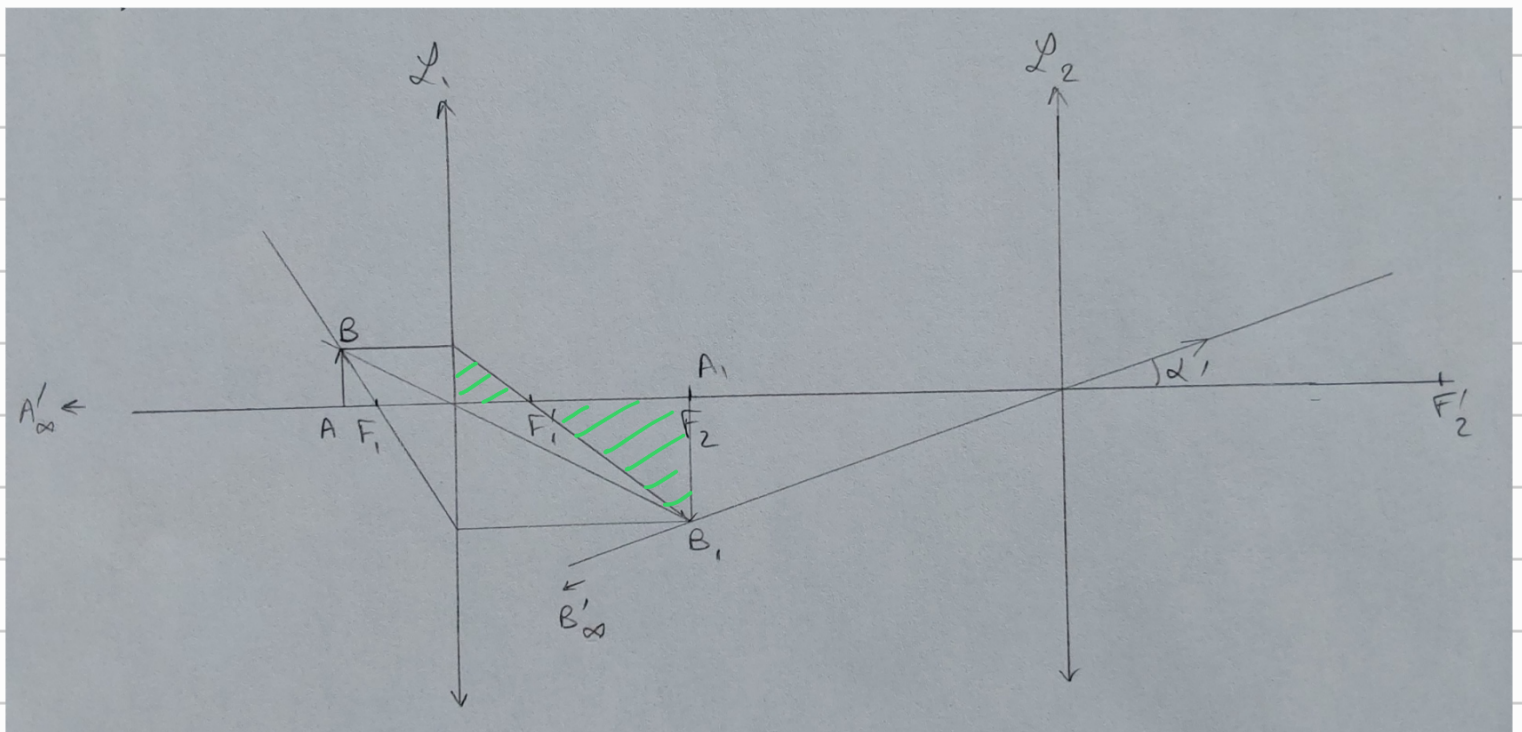
$$k' = \underline{9,13 \cdot 10^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Exercice 4

Un microscope est un système optique constitué de 2 lentilles appelées objectif (lentille située près de l'objet) et oculaire (lentille située près de l'œil).

Comme on veut faire une observation sans fatigue oculaire, l'image finale sera située à l'infini (qui est le PC d'un œil emmetrope).

On a donc: $A \xrightarrow{L_{obj}} A_1 = F_2 \xrightarrow{L_{oc.}} A'_\infty$



Pour déterminer si le patient est en bonne santé il faut estimer le nombre de globules rouges par mm^3 de son sang.

Pour cela, il faut déterminer à quel volume de sang correspond le disque observé puis dénombrer les globules s'y trouvant.

Le volume est celui d'un cylindre de base $\pi \times AB^2$ avec AB = plus grande distance de l'échantillon observable dans le champ, et de hauteur égale à la profondeur de champ (voir définition dans l'énoncé)

Etape 1 : détermination des distances focales des 2 lentilles.

* D'après le schéma $\tan \alpha' = \frac{A_1 B_1}{f_2'}$

et d'après l'énoncé $\tan \alpha = \frac{A_1 B_1}{d_m}$

avec d_m = distance œil-AP.

On a donc $G_c = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{A_1 B_1}{f_2'} \times \frac{d_m}{A_1 B_1}$

Soit $G_c = \frac{d_m}{f'_2} \Leftrightarrow \boxed{f'_2 = \frac{d_m}{G_c}}$

AN: $f'_2 = \frac{0,25}{10} = \underline{0,025 \text{ m}}$

* $|\chi_1| = \left| \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} \right|$ d'après l'explication de l'énoncé

et d'après le tracé $\left| \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} \right| = \left| \frac{\overline{F_1 F_2}}{f'_1} \right|$

(Théorème de Thalès dans les triangles hachurés)

Soit $\boxed{f'_1 = \frac{\Delta}{|\chi_1|}}$

AN: $f'_1 = \frac{160 \cdot 10^{-3}}{60} = \underline{2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$

Etape 2: détermination du rayon du disque observé

$$|\overline{A_1 B_1}| = |\chi_1| \times |\overline{AB}|$$

Or d'après l'énoncé il y a un diaphragme d'ouverture pour l'oculaire, placé au foyer de celui-ci, qui détermine donc la taille maximale de $A_1 B_1$.

$$A, B_{\max} = \frac{D}{2}$$

Soit
$$AB_{\max} = \frac{D/2}{18,1}$$

AN:
$$AB_{\max} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2 \times 60} = \underline{1,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}}$$

(rayon du disque observé)

Etape 3 : détermination de la profondeur de champ δ

Pour cela il faut déterminer les positions des objets qui donnent respectivement une image finale au PP et au PR d'un œil emmetrope.

* image finale à l'infini :

$$A_o \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'_\infty$$

A est donc le conjugué de F_2 par $\mathcal{L}_1$

On applique la relation de conjugaison

(aux foyers car on a $\overline{F_1 F_2}$ dans les données)

$$\overline{F_1 A_o} \cdot \overline{F_1 F_2} = -f_1'^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{F_1 A_o} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}}$$

* image finale au PP

$$A_{\infty} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A' \text{ au PP avec}$$

l'œil placé en F'_2 d'après l'énoncé.

A_1 et A' sont conjugués par $\mathcal{L}_2$:

$$\overline{F_2 A_1} \times \overline{F'_2 A'} = -f_2'^2 \quad \text{avec} \quad \overline{F'_2 A'} = -d_m$$

$$\text{Soit} \quad \overline{F_2 A_1} = \frac{f_2'^2}{d_m}$$

Et A_1 est le conjugué de A_{∞} par $\mathcal{L}_1$:

$$\overline{F_1 A_{\infty}} \times \overline{F'_1 A_1} = -f_1'^2 \quad \text{et} \quad \overline{F'_1 A_1} = \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 A_1} \\ = \Delta + \frac{f_2'^2}{d_m}$$

On a donc

$$\boxed{\overline{F_1 A_{\infty}} = \frac{-f_1'^2}{\Delta + f_2'^2/d_m}}$$

* Expression de δ : $\delta = \overline{A_0 A_{\infty}} = \overline{A_0 F_1} + \overline{F_1 A_{\infty}}$

$$\delta = \frac{f_1'^2}{\Delta} - \frac{f_1'^2}{\Delta + f_2'^2/d_m} = \frac{f_1'^2}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{f_2'^2}{\Delta d_m}} \right)$$

Or d'après ce qui précède $\frac{dm}{f_1'} = G_c$

$$\text{On a donc } \delta = \frac{f_1'^2}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{dm}{\Delta G_c^2}} \right)$$

On peut faire l'AN directement, ou simplifier l'expression car ici on a

$$\frac{dm}{\Delta G_c^2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-1}}{160 \cdot 10^{-3} \times 10^2} = 1,5 \cdot 10^{-2} \ll 1$$

et alors on utilise $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$
pour $x \ll 1$

$$\text{Soit } \delta = \frac{f_1'^2}{\Delta} \left(1 - 1 + \frac{dm}{\Delta G_c^2} \right) = \frac{f_1'^2 dm}{\Delta^2 G_c^2}$$

Or on a montré précédemment que $f_1' = \frac{\Delta}{\gamma_1}$

$$\text{donc on obtient } \delta = \frac{\Delta^2}{\gamma_1^2} \frac{dm}{\Delta^2 G_c^2}$$

$$\text{Soit } \boxed{\delta = \frac{dm}{\gamma_1^2 \cdot G_c^2}}$$

$$\text{AN: } \delta = \frac{2,5 \cdot 10^{-1}}{60^2 \times 10^2} = \underline{\underline{6,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}}}$$

Etape 4: Estimation de la densité de globules n^*

$$n^* = \frac{N}{V} = \frac{N}{S \times \delta}$$
 avec N = nombre de globules comptés dans l'image.

$$n^* = \frac{N}{\pi \times AB_{\max}^2 \times \delta}$$

Dans $1/8^e$ du disque on compte 35 globules donc $N = 8 \times 35$

$$\text{et } n^* = \frac{8 \times 35}{\pi \times (1,7 \cdot 10^{-4})^2 \times 6,9 \cdot 10^{-7}} = 4,5 \cdot 10^{15} \text{ globules/m}^3$$

or $1 \text{ mm}^3 = 10^9 \text{ mm}^3$ donc

$$\underline{n^* = 4,5 \cdot 10^6 \text{ globules/mm}^3}$$

soit 4,5 millions de globules/mm³,
l'analyse de sang est donc normale.