Devoir surveillé n° 1

Durée : 3 heures

Préambule : Exemple d'en-tête de concours

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est recommandé de lire le texte en entier. L'usage de la calculatrice est autorisé. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Légende :

— Les questions précédées du symbole ⚙ nécessitent un raisonnement plus approfondi, parfois avec prise d'initiatives. Toute tentative de résolution, avec une présentation claire et rigoureuse de la démarche suivie, sera valorisée, même si elle n'a pas abouti.

— Les questions précédées du symbole ★ présentent un niveau de difficulté supérieure.

Plan :

Ce problème se compose de 3 exercices indépendants :

— L'exercice 1 propose une étude du vol des papillons par analyse dimensionnelle, adapté d'un sujet Mines-Pont.

— L'exercice 2 s'intéresse à la déviation de la lumière par le prisme.

— L'exercice 3 porte sur la détermination de l'image d'un objet par un système optique.

Exercice 1 : Vol de papillons ($\sim$ 40%)

Les papillons, de taille et de forme variées, présentent, à l'œil exercé du physicien (et entomologiste amateur) une propriété remarquable : plus ils sont petits, plus le battement de leurs ailes est rapide.

L'étude d'une famille d'animaux de même forme (homothétiques) mais de tailles variables a conduit à affirmer que la surface S des papillons est proportionnelle au carré de leur taille caractéristique ℓ (longueur du corps, de la tête à la queue), et que leur volume V est proportionnel au cube de cette grandeur, ce qu'on écrira :

$$S = k_1\,\ell^2 \qquad \text{et} \qquad V = k_2\,\ell^3$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes adimensionnée (fonction par exemple de la forme des ailes), que l'on ne cherche pas à déterminer.

La figure 1 ci-dessous rassemble, pour 5 espèces de papillons, des mesures de l'envergure R des ailes (plus grande distance de l'aile au point milieu de l'abdomen), de la longueur ℓ du corps (de la tête à la queue) et de la fréquence f_b du battement des ailes en vol (mesurée par des caméras rapides).

Espèce	R (mm)	ℓ (mm)	f_b (Hz)	photo
Troides rhadamantus	71	46	9	
Papilion rumanzovia	56	35	10	
Pachliopta hector	44	27	13	
Graphium sarpedon	39	25	16	
Precis iphita	33	21	19	
Calospila idmon	16	11	32	

FIGURE 1 – Caractéristiques de 5 espèces de papillons

Q1. Construire un graphique avec les données du tableau 1 permettant de montrer que l'envergure R est proportionnelle à la longueur du corps ℓ pour les 5 espèces de papillons considérées.

Le papillon en vol est soumis à trois types de forces :

— des forces volumiques (pesanteur, poussée d'Archimède), de résultante $\overrightarrow{F_v}$

— des forces surfaciques (forces de contact des pattes avec les supports), de résultante $\overrightarrow{F_s}$

— une force de poussée hydrodynamique $\overrightarrow{\Pi}$ due aux battements des ailes

Q2. La norme de la résultante des forces surfaciques F_s suit une loi de la forme $F_s = k_3 \times S$, avec S = surface du papillon, et la norme de la résultante des forces volumiques F_v suit une loi de la forme $F_v = k_4 \times V$, avec V = volume du papillon.
Déterminer les dimensions respectives des constantes k_3 et k_4.

On admet que la norme Π de la force de poussée hydrodynamique due aux battements des ailes ne dépend que de la masse volumique ρ_a de l'air, de la surface S des ailes et de la fréquence f_b du battement des ailes.

Q3. ⚙ Déterminer l'expression donnant Π en fonction de ρ_a, S, f_b et d'une constante numérique (adimensionnée) que l'on notera k_5.

Q4. Le vol stationnaire du papillon est régi par un équilibre mécanique se traduisant par $\Pi = F_v + F_s$, où l'un des deux termes (terme lié à la surface F_s ou terme lié au volume F_v) est prépondérant. On suppose que la fréquence des battements est reliée à la taille caractéristique ℓ par une relation du type $f_b = k_6\,\ell^\delta$, avec δ une constante numérique, et k_6 une constante indépendante de la taille caractéristique ℓ.

(a) Déterminer la valeur de δ si F_v est prépondérant.

(b) Même question dans le cas où F_s est prépondérant.

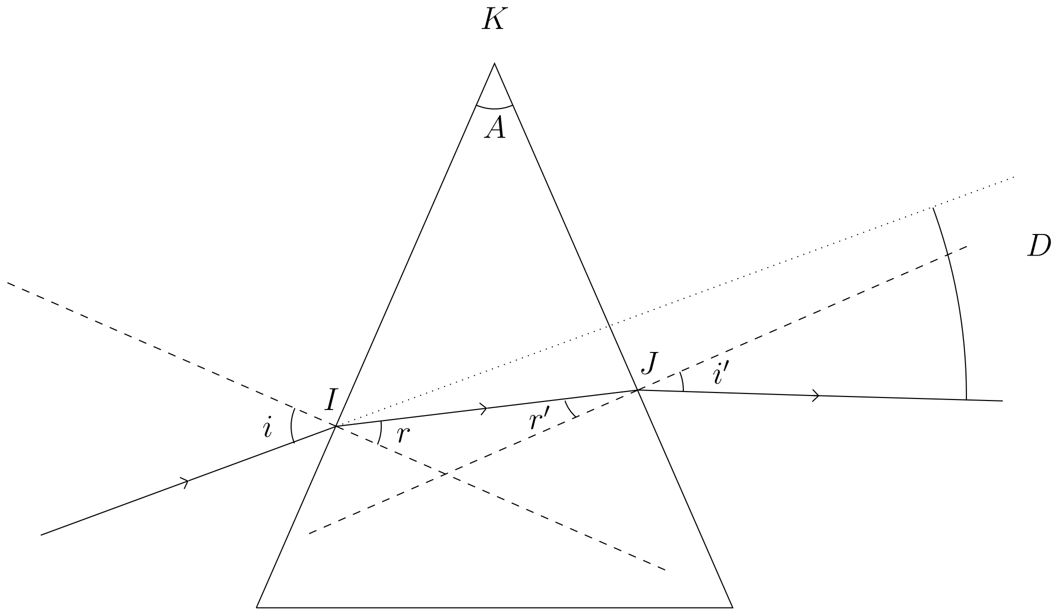
Q5. ⚙ ★ Réaliser, avec la calculatrice, une exploitation des données expérimentales du tableau 1 pour déterminer la valeur du coefficient δ. En déduire lequel des deux termes F_v ou F_s est effectivement prépondérant lors du vol stationnaire de ces 5 espèces.

Exercice 2 : Étude de la déviation par le prisme ($\sim$ 40%)

Cet exercice constitue la partie préparatoire du TP5 qui sera réalisé le vendredi 17 octobre.

On considère un prisme droit à base triangulaire, transparent d'indice de réfraction n dont la valeur dépend de λ_0, la longueur d'onde de la radiation dans le vide. On s'intéresse aux rayons lumineux se propageant dans un plan de section principal (perpendiculaire à l'arête du prisme). On note A l'angle du sommet qui fait face à la base du triangle isocèle. Ce prisme est plongé dans l'air d'indice n_0.

Dans cet exercice on travaillera avec des angles non orientés.



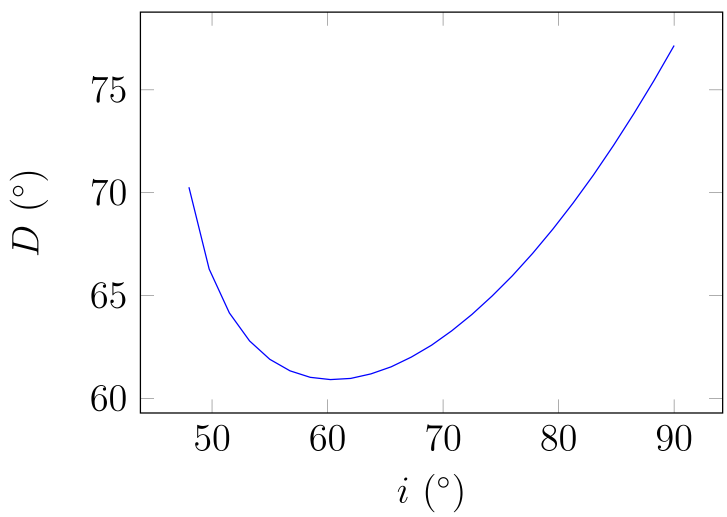
Q1. Appliquer les relations de Descartes aux points I et J.

Q2. Établir les 2 expressions suivantes :

$$A = r + r' \qquad \text{et} \qquad D = i + i' - A$$

Q3. En déduire l'expression de D en fonction de i, A, n et n_0.

La fonction $D(i)$ pour un prisme d'angle au sommet $A = 60°$, d'indice $n = 1,74$, placé dans l'air d'indice $n_0 = 1{,}00$ est tracée sur le graphique ci-dessous :



Q4. ★ À quelle condition sur r' le rayon émerge-t-il en J ? En déduire une condition sur i pour que le rayon émerge en J. (donner l'expression littérale de cette condition sur i en fonction de A, n et n_0 et faire l'AN).

Q5. Comment cette condition sur i apparaît-elle sur le graphique précédent ? Lors de l'expérience, le faisceau incident ne pourra donc sortir par la face opposée que s'il est suffisamment incliné par rapport à la normale sur la face d'entrée du prisme.

Le graphique $D(i)$ permet également de voir qu'il existe deux angles d'incidence donnant la même déviation D. C'est la conséquence du principe du retour inverse de la lumière : si D est la déviation correspondant à une incidence i, alors D est aussi la déviation correspondant à l'incidence i'. Et lorsque D atteint son minimum ($D = D_m$), ces deux valeurs sont égales : $i = i'$.

Q6. ★ Sur un schéma, représenter le trajet d'un faisceau lumineux arrivant sur un prisme d'indice $n = 1,74$ et d'angle $A = 60\ ^\circ$ lorsque la déviation est minimale. Cette configuration est appelée le « minimum de déviation ».

Q7. ★ Montrer que pour $D = D_m$, on a :

$$n = n_0 \times \frac{\sin(\frac{A+D_m}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}$$

Q8. ⚙ En déduire une méthode expérimentale permettant de déterminer l'indice du prisme n.

Q9. Le matériau constitutif du prisme est dispersif. Expliquer ce terme. Qu'observe-t-on si on envoie sur le prisme un faisceau provenant d'une lampe spectrale au mercure ?

Exercice 3 : Lentilles minces ($\sim$ 20%)

Q1. **Sur l'annexe à rendre avec la copie**, déterminer graphiquement l'image $A'B'$ de l'objet AB à travers l'ensemble constitué des 2 lentilles ($\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$), avec $f'_1 = -60\,\text{cm}$ et $f'_2 = 40\,\text{cm}$.

Q2. Déterminer par le calcul la taille et la position de l'image $A'B'$ de l'objet AB par l'ensemble des 2 lentilles ($\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$) , avec $f'_1 = -60\,\text{cm}$ et $f'_2 = 40\,\text{cm}$ et $\overline{O_1A} = 30\,\text{cm}$ (situation de la question Q1). Comparer avec les résultats obtenus par la méthode graphique. Qualifier cette image avec les adjectifs pertinents.