Devoir maison $n°$ 3

Formulaire : $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos(2a)$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

Exercice 1 : Trompette

Partie I. Protection des trompettistes par contrôle actif

Les musiciens d'orchestre sont très exposés aux bruits de niveaux sonores élevés, qui génèrent des pertes auditives précoces et irréversibles. Parmi eux les cuivres, dont la trompette, sont exposés à des niveaux au delà des limites règlementaires parfois pendant plus de 8h par jour. Un des moyens de protection est l'utilisation de casques ou de bouchons. Cette partie présente un procédé utilisé dans certains dispositifs de protections auditives : le contrôle actif du bruit.

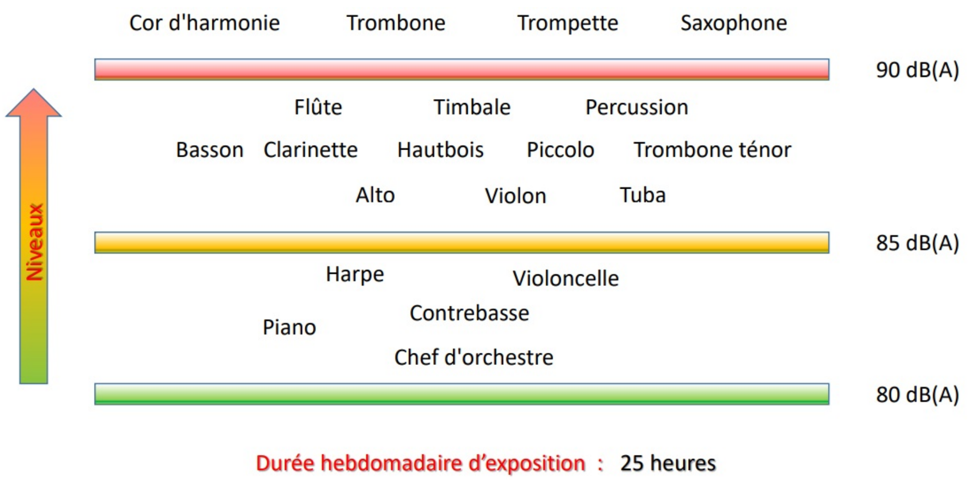

Figure 1 – Exposition au bruit des musiciens d'orchestre de musique classique, source INRS (Institut National de Recherche et de Sécurité)

La méthode du contrôle actif du bruit consiste à émettre une onde sonore qui, superposée à l'onde sonore du bruit, l'annule par interférence destructive.

Q1. **Question préliminaire :** On considère deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation : $s_1 = S_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2 = S_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ où S_1 et S_2 sont les amplitudes et φ_1 et φ_2 les phases à l'origine des temps de s_1 et s_2. On s'intéresse au signal s obtenu en faisant la somme de s_1 et s_2 : $s = S\cos(\omega t + \varphi_S)$.

(a) Faire la représentation de Fresnel des deux ondes s_1 et s_2. Montrer que l'expression de l'amplitude S du signal résultant s en fonction des amplitudes S_1 et S_2 et du déphasage $\Delta\varphi$ du signal s_2 par rapport au signal s_1 est :

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\Delta\varphi}$$

(b) Justifier alors que S est minimale à condition que les signaux s_1 et s_2 soient en opposition de phase.

On considère la conduite d'un casque antibruit actif dans laquelle est capté un bruit extérieur. Afin d'éliminer cette nuisance sonore, le système est constitué d'un microphone qui capte le bruit et qui envoie un signal électrique vers un dispositif électronique appelé contrôleur. Le contrôleur traite en temps réel l'information provenant du micro afin de piloter un haut-parleur qui émet une onde qui interfère destructivement au point M avec le bruit incident. L'onde sonore en aval du point M est alors de très petite amplitude : le bruit a été réduit. La célérité des ondes sonores dans la conduite est : $c = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

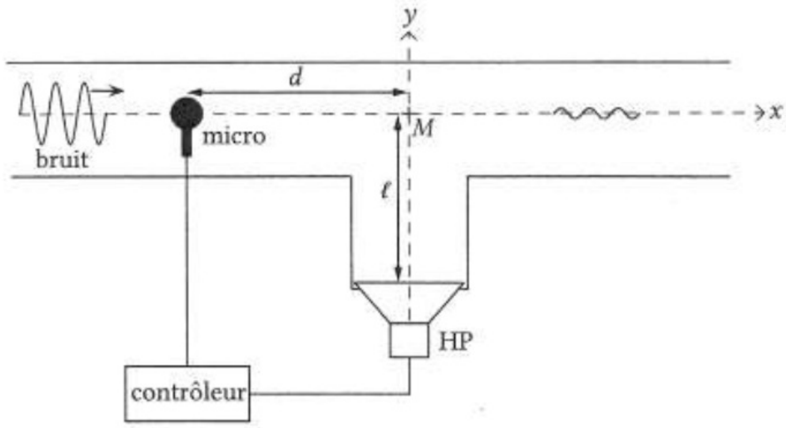

FIGURE 2 – Constitution d'un dispositif antibruit actif

Q2. En négligeant les temps de propagation dans les câbles, déterminer numériquement l'intervalle de temps Δt dont dispose le contrôleur pour traiter l'information venant du micro. On prendra $d = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ et $\ell = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ (voir figure 2).

On suppose que le bruit est une onde progressive sinusoïdale suivant l'axe (Mx), de fréquence f. Le haut-parleur émet, quand à lui, une onde progressive sinusoïdale suivant l'axe (My).

Q3. Quelles sont les conditions pour qu'il y ait interférence en M ?

Q4. Donner l'expression en M de la pression acoustique $p_1(d, t)$ associée au bruit en prenant l'origine de l'axe x au niveau du micro. On notera P_1 son amplitude. La phase à l'origine des temps au niveau du micro est φ_{10}.

Q5. Donner l'expression en M de la pression acoustique $p_2(\ell, t)$ associée à l'onde sonore émise par le haut-parleur. On prendra l'origine de l'axe y au niveau du haut-parleur. On notera P_2 son amplitude. La phase à l'origine des temps au niveau du haut-parleur est φ_{20}.

Q6. En faisant apparaître un entier m, exprimer le déphasage $\Delta\varphi$ de $p_2(\ell, t)$ par rapport à $p_1(d, t)$ pour que l'interférence soit destructive en M.
Exprimer ensuite $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ en fonction de $d,\ \ell,\ f,\ c$ et m.

Q7. Dans le cas où $m = 0$, exprimer $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ en fonction de $d,\ \ell,\ f$ et c. Calculer pour $m = 0$ la valeur numérique de $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ que doit appliquer le contrôleur pour avoir une interférence destructive en M. On prendra : $f = 100\,\mathrm{Hz}$. On donnera la valeur en radians et la valeur en degrés.

Partie II. Son produit par une trompette

Une trompette est un instrument à vent de la famille des cuivres. Le son y est produit par la vibration des lèvres du trompettiste au niveau de l'embouchure, qui génère une onde acoustique au sein de l'instrument. La trompette peut être modélisée comme un tuyau sonore rectiligne de longueur totale $L = 1{,}40\,\text{m}$, fermé au niveau de l'embouchure et ouvert au niveau du pavillon.

On introduit un axe x tel que l'embouchure se trouve en $x = 0$ et le pavillon en $x = L$.

Q8. On modélise l'onde de pression $P_i(x,t)$ générée par le trompettiste par une onde progressive harmonique d'amplitude P_0, de pulsation ω, et de phase initiale φ_i en $x = 0$. Écrire son expression mathématique.

Q9. Lorsqu'elle atteint le pavillon, cette onde se réfléchit en conservant la même amplitude. Écrire l'expression mathématique de cette onde réfléchie, $P_r(x,t)$, en notant φ_r sa phase initiale en $x = 0$.

Q10. Écrire l'expression de l'onde totale dans la trompette sous la forme :

$$P_{\text{tot}}(x,t) = A\cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)$$

en exprimant A, k, ψ et φ en fonction des paramètres déjà introduits. On qualifie de « stationnaire » une telle onde.

Les conditions aux limites (tuyau fermé-ouvert) imposent un ventre de pression (= amplitude de la pression maximale) au niveau de l'embouchure ($x = 0$) et un nœud (= amplitude de la pression minimale) au niveau du pavillon ($x = L$). Les notes jouables à la trompette correspondent aux modes propres du tuyau sonore.

Q11. En s'appuyant sur une représentation graphique de l'onde, montrer que les longueurs d'onde λ_n des modes propres sont telles que :

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2} \qquad \text{(relation ①)}$$

En déduire la fréquence fondamentale (correspondant à $n = 0$) de la trompette.

Q12. On se propose de retrouver le résultat précédent (relation ①) par le calcul.

(a) En utilisant la condition aux limites à l'embouchure, montrer que $\psi = 0$ convient.

(b) Déduire de la seconde condition aux limites que $k_n L = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ avec n un entier.

(c) Retrouver enfin la condition sur la longueur d'onde.

Q13. Lorsque le trompettiste appuie sur un piston, l'air est dévié dans la coulisse correspondante, ce qui a pour effet de modifier la longueur du tuyau. Le son est « abaissé de trois demi-tons », ce qui signifie que la fréquence fondamentale est divisée par $2^{3/12}$. En déduire la longueur de la coulisse du troisième piston.