

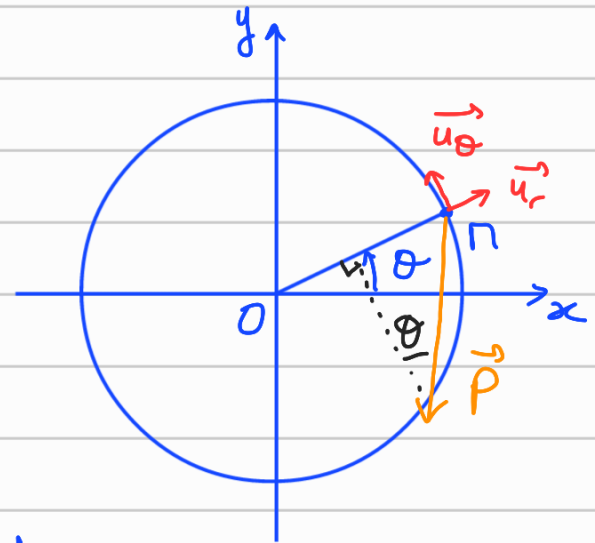
Correction du TD NECA 2

Exercice 6 :

Q1. On étudie le système {chaussette} dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans la 1^{ère} phase, le système est en mouvement circulaire uniforme, de rayon R et de vitesse angulaire ω .

$$\vec{v} = R\omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_r$$



Q2. Bilan des forces sur la chaussette :

* Poids $\vec{P}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{verticale vers le bas} \\ \text{norme } P = mg \end{array} \right.$

* Réaction du tambour : $\vec{R}$ (pas connue à priori, une composante radiale selon $\vec{u}_r$ notée $\vec{R}_N$ et une composante tangentielle notée $\vec{R}_\tau$).

On applique le principe fondamental de la dynamique au système {chaussette} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} -mR\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_N &= mg\sin\theta - mR\omega^2 \\ R_T &= mg\cos\theta \end{aligned}$$

Q3. La composante radiale s'annule pour θ_0 tel que $mg\sin\theta_0 = mR\omega^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin\theta_0 = \frac{R\omega^2}{g}}$$

AN avec $R = 0,25 \text{ m}$ et $\omega = \frac{50 \times 2\pi}{60}$

$$\sin\theta_0 = \frac{0,25 \times 50^2 \times 4\pi^2}{60^2 \times 9,81}$$

$$\text{Soit } \underline{\sin\theta_0 = 44^\circ}$$

Q4. Lorsque la réaction du support s'annule, il n'y a plus contact entre le tambour et la chaussette, elle se décolle de la paroi.

A partir du point $\Pi_0(R, \theta_0)$, la chaussette est en mouvement à accélération $\vec{a} = \vec{g}$ constante puisqu'elle n'est alors soumise qu'à son poids. Et sa vitesse initiale vaut $\vec{v}_0 = R\omega \vec{u}_{\theta_0}$.

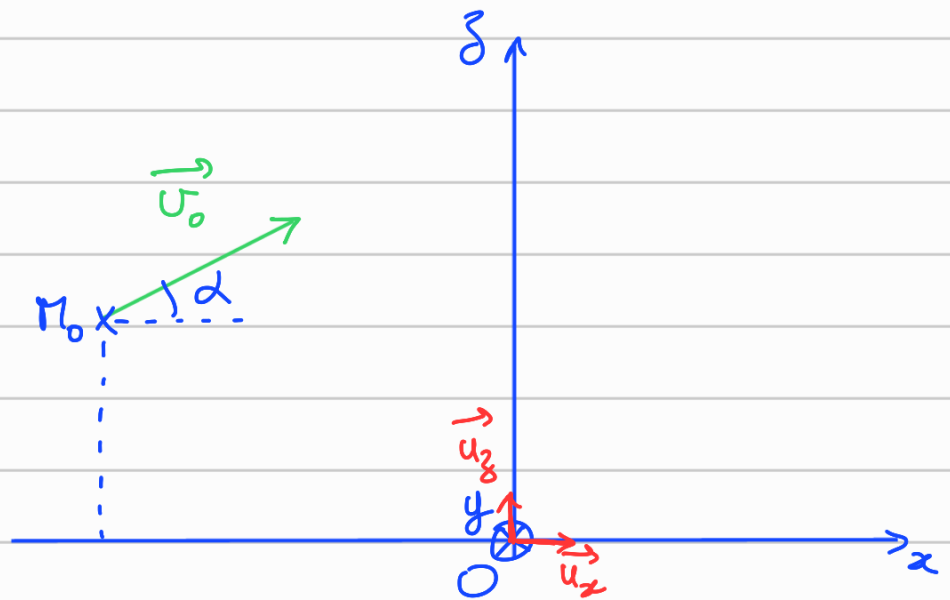
Exercice 7 :

Q1. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {ballon} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

On projette selon les 3 axes d'un repère cartésien :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$



On choisit l'origine du repère au sol sous le panier et on utilise les conditions initiales

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$$
$$\vec{ON}(0) = -D \vec{u}_x + h \vec{u}_z$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t - D \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + h \end{cases}$$

Q2. On isole t dans l'expression de x

$$t = \frac{x + D}{v_0 \cos \alpha}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x+D}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x+D}{v_0 \cos \alpha} \right) + h$$

Q3. Pour que le panier soit marqué, il faut $z(0) = H$.

$$H = -\frac{1}{2} g \left(\frac{D}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{D}{v_0 \cos \alpha} \right) + h$$

$$H = -\frac{g D^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + D \tan \alpha + h.$$

$$\text{or } 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{soit } H = -\frac{g D^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + D \tan \alpha + h$$

On résout le polynôme du second degré en $\tan \alpha$. On pose $X = \tan \alpha$

$$\frac{g D^2}{2 v_0^2} X^2 - D X + \frac{g D^2}{2 v_0^2} + H - h = 0$$

$$X^2 + \frac{2 D v_0^2}{g D^2} X + \frac{2 v_0^2}{g D^2} \left(\frac{g D^2}{2 v_0^2} + H - h \right) = 0$$

$$X^2 + \frac{2v_0^2}{gD} X + 1 + \frac{2v_0^2}{gD^2} (H-h) = 0$$

Q4. Ce polynôme admet des racines réelles si $\Delta > 0$.

$$\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2 D^2} - 4 \left(1 + \frac{2v_0^2}{gD^2} (H-h) \right) > 0$$

On pose $Y = v_0^2$. On a donc le polynôme

$$\frac{4}{g^2 D^2} Y^2 - \frac{8}{gD^2} (H-h) Y - 4 > 0$$

$$\Delta = \frac{64}{g^2 D^4} (H-h)^2 + \frac{64}{g^2 D^2} = \frac{64}{g^2 D^4} \left((H-h)^2 + D^2 \right) > 0$$

Ce polynôme est du signe de $\frac{4}{gD^2}$ (donc > 0) à l'extérieur des racines

$$\text{Racines: } Y = \frac{4}{gD^2} (H-h) \times \frac{g^2 D^2}{4} \pm \frac{4}{gD^2} \sqrt{(H-h)^2 + D^2} \times \frac{g^2 D^2}{4}$$

$$Y = g(H-h) \pm g \sqrt{(H-h)^2 + D^2}$$

$$\text{Pour } Y < g(H-h) - g \sqrt{(H-h)^2 + D^2}$$

$$\text{Et } Y > g(H-h) + g \sqrt{(H-h)^2 + D^2}$$

le polynôme est positif.

Or $y = v_0^2$ donc $y > 0$ ce qui exclut les valeurs négatives.

Il faut donc $v_0^2 > g \left(H - h + \sqrt{(H-h)^2 + D^2} \right)$

$$\text{Soit } v_0 > \sqrt{g \left(H - h + \sqrt{(H-h)^2 + D^2} \right)}$$

Q6 AN pour un lancer franc :

$$v_0 > \sqrt{9,81(3,05 - 2 + \sqrt{(3,05 - 2)^2 + 4,60^2})}$$

$$\text{Soit } \underline{v_0 > 7,5 \text{ m.s}^{-1}}$$

AN Pour un panier à 3 points :

$$v_0 > \sqrt{9,81(3,05 - 2 + \sqrt{(3,05 - 2)^2 + 6,25^2})}$$

$$\underline{v_0 > 8,51 \text{ m.s}^{-1}}$$

$$\text{Q7. } x^2 + \frac{2v_0^2}{gD}x + 1 + \frac{2v_0^2}{gD^2}(H-h) = 0$$

La condition $\Delta > 0$ étant remplie,

$$\text{on a } x = \frac{v_0^2}{gD} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\text{avec } \Delta = \frac{4v_0^4}{g^2 D^2} - 4 \left(1 + \frac{2v_0^2}{g D^2} (H-h) \right) \\ = \frac{4}{g^2 D^2} (v_0^4 - g^2 D^2 - 2v_0^2 g (H-h))$$

$$X = \frac{v_0^2}{g D} \pm \frac{\sqrt{v_0^4 - g^2 D^2 - 2v_0^2 g (H-h)}}{g D}$$

$$\text{donc } \tan \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2 D^2 - 2v_0^2 g (H-h)}}{g D}$$

Il y a donc 2 valeurs possibles pour $\tan \alpha$.

Q8. Pour $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ et $D = 4,60 \text{ m}$
(lancer franc) on a

$$\tan \alpha = \frac{10^2 \pm \sqrt{10^4 - 9,81^2 \cdot 4,60^2 - 2 \cdot 10^2 \cdot 9,81 (3,05 - 2)}}{9,81 \times 4,60}$$

$$\tan \alpha = 3,92 \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = 0,51$$

$$\text{Soit } \underline{\alpha = 75,7^\circ} \quad \text{ou} \quad \underline{\alpha = 27^\circ}$$

Q9. L'équation à résoudre pour marquer est :

$$H = -\frac{g D^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + D \tan \alpha + h \quad (\rightarrow \text{Q.3})$$

On isole v_0 :

$$H - h - D \tan \alpha = - \frac{g D^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$2 v_0^2 \cos^2 \alpha (H - h - D \tan \alpha) = -g D^2$$

$$v_0^2 = \frac{g D^2}{2 \cos^2 \alpha (h + D \tan \alpha - H)}$$

Soit
$$v_0 = \frac{D}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h - H + D \tan \alpha)}}$$

Q10. AN: $v_0 = \frac{4,60}{\cos 70} \sqrt{\frac{9,81}{2(2 - 3,05 + 4,60 \tan 70)}} = 8,8 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice 8 :

Q1. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {plongeur} de masse constante dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

Ici la seule force prise en compte est le poids donc $m \vec{a} = \vec{g}$.

On se place en coordonnées cartésiennes avec l'origine du repère au niveau de l'eau, et l'axe Oz descendant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = g \end{cases}$$

Par intégrations successives et avec les conditions initiales du problème : $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$, on a :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = gt \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

On détermine t_c tel que $z(t_c) = h$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\text{AN: } t_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,8}} = \underline{1,4 \text{ s}}$$

$$\text{et } v_c = \dot{z}(t_c) \quad \text{soit } v_c = \sqrt{2gh}$$

$$\text{AN: } v_c = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 10} = \underline{14 \text{ m.s}^{-1}}$$

Q2. Dans la 2^{ème} phase du mouvement (après son entrée dans l'eau), le plongeur est soumis à des forces supplémentaires : la poussée d'Archimède et les frottements fluides. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {plongeur} dans le référentiel terrestre et projeté sur l'axe (Oz) donne :

$$m\ddot{z} = mg - \frac{m}{d_h} g - k\dot{z}$$

En notant $\dot{z} = v_z$ on obtient :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{k}{m} v_z = \left(1 - \frac{1}{d_h}\right) g$$

Avec $\tau = \frac{k}{m}$ on a

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \left(1 - \frac{1}{d_h}\right) g$$

Q3. La solution de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation homogène :

$$v_{zp} = \tau g \left(1 - \frac{1}{d_h}\right)$$

$$v_{zH} = A e^{-t/\tau}$$

$$v_z(t) = A e^{-t/\tau} + \tau g \left(1 - \frac{1}{d_h}\right)$$

On détermine la constante A en posant comme origine des temps l'entrée dans l'eau : $v_z(0) = v_e$. On obtient :

$$v_e = A + \tau g \left(1 - \frac{1}{d_h}\right) \Rightarrow A = v_e - \tau g \left(1 - \frac{1}{d_h}\right)$$

$$v_z(t) = \left[v_e - \tau g \left(1 - \frac{1}{d_h}\right) \right] e^{-t/\tau} + \tau g \left(1 - \frac{1}{d_h}\right)$$

Q4. On détermine la vitesse limite

$$v_L = \lim_{t \rightarrow \infty} v_z$$

$$v_L = \tau \cdot g \left(1 - \frac{1}{dh} \right)$$

$$\text{AN : } v_L = \frac{80}{250} \cdot 9,8 \left(1 - \frac{1}{0,9} \right) = \underline{-0,35 \text{ m.s}^{-1}}$$

Q5. $|v_L| = -v_L$ donc

$$v_z(t) = (v_e + |v_L|) e^{-t/\tau} - |v_L|$$

le plongeur commence à remonter
pour $v_z(t_1) = 0$:

$$(v_e + |v_L|) e^{-t_1/\tau} - |v_L| = 0$$

$$v_e + |v_L| e^{-t_1/\tau} = |v_L|$$

$$t_1 = -\tau \ln \frac{|v_L|}{v_e + |v_L|} \Rightarrow t_1 = \tau \ln \left(1 + \frac{v_e}{|v_L|} \right)$$

$$\text{AN : } t_1 = \frac{80}{250} \ln \left(1 + \frac{14}{0,35} \right) = \underline{1,2 \text{ s}}$$

Q6. La profondeur maximale atteinte
est $z(t_1)$.

On intègre $v_z(t)$ pour obtenir $z(t)$; en prenant comme condition initiale $z(0) = 0$:

$$z(t) = -\tau(v_e + |v_L|) e^{-t/\tau} - |v_L| t + A$$

avec A une constante que l'on détermine avec la condition initiale $z(0) = 0$:

$$0 = -\tau(v_e + |v_L|) e^0 + A$$

$$\Leftrightarrow A = \tau(v_e + |v_L|)$$

Soit $z(t) = \tau(v_e + |v_L|) (1 - e^{-t/\tau}) - |v_L| \cdot t$

On détermine ensuite $z(t_1)$:

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|) \left(1 - e^{-\ln(1 + \frac{v_e}{|v_L|})}\right) - |v_L| \tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|) \left(1 - e^{\ln\left(\frac{|v_L|}{v_e + |v_L|}\right)}\right) - |v_L| \tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|) \left(1 - \frac{|v_L|}{v_e + |v_L|}\right) - |v_L| \tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|) \left(\frac{v_e}{v_e + |v_L|}\right) - |v_L| \tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau \cdot v_e - |v_L| \tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$AN : z(t_1) = 0,32 \cdot 14 - 0,35 \cdot 0,32 \ln \left(1 + \frac{14}{0,35} \right)$$

$$\underline{z(t_1) = 4,1m}$$

