EL2 : Circuits linéaires du 1$^{\text{er}}$ ordre en régime transitoire

De nombreuses applications nécessitent l'utilisation d'un circuit électrique contenant un condensateur et une (ou plusieurs) résistances, comme :

← Le flash d'un appareil photo : il s'allume lors de la décharge très rapide d'un condensateur, et il faut attendre un peu entre deux photos avec flash.

→ Un défibrillateur : la décharge du condensateur permet de délivrer un courant électrique dans le corps de la victime entre les deux électrodes.

Plan du cours

À savoir par ♥

✓ Tout le chapitre 3 !

À savoir faire

✓ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
✓ Déterminer les conditions initiales et en $t \to \infty$ pour les grandeurs électriques.
✓ Déterminer en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge.
✓ Déterminer la constante de temps d'un circuit, et un ODG de la durée du rég. transitoire.
✓ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC série.
✓ Établir et résoudre l'éq. diff. vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit RL.
✓ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RL série.
✓ Établir l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine.

I Régime transitoire - régime permanent

Lorsqu'un changement brutal intervient dans un circuit (fermeture d'un interrupteur par ex.), les tensions et intensités mettent un certain temps à s'établir et à atteindre un nouveau régime permanent : c'est le **régime transitoire**, au cours duquel les tensions et intensités évoluent dans le temps entre un premier régime permanent et le nouveau régime permanent. Nous étudierons deux types de régime transitoire :

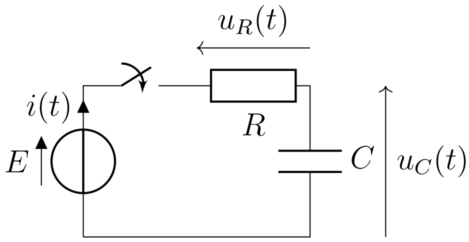
— **Réponse à un échelon de tension (ou réponse indicielle)** : le circuit comporte une source de tension de f.é.m. nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant. Cela correspond en pratique à l'allumage d'un générateur de tension constante, ou à la fermeture d'un interrupteur.

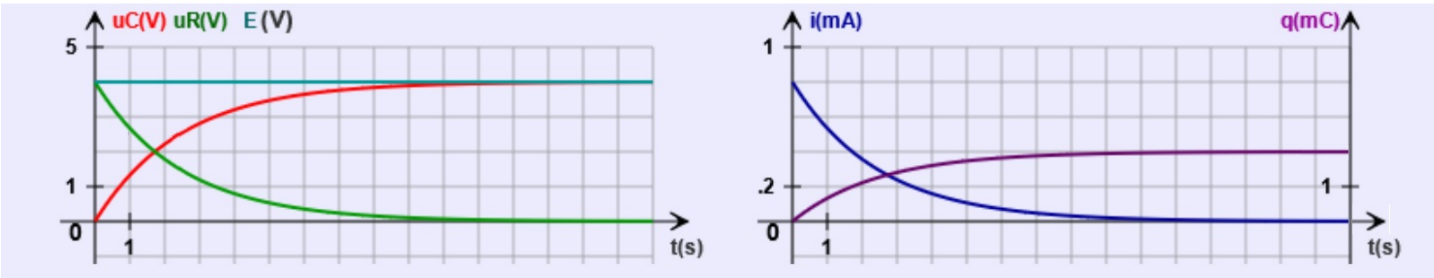
— **Régime libre** : le circuit ne comporte aucun générateur. Les grandeurs électriques évoluent néanmoins au cours du temps si, à un instant initial, un condensateur est chargé (par ex.).

II Réponse du circuit RC à un échelon de tension

II.1 Observations expérimentales

On étudie la charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R par un générateur idéal de fem E.
Le condensateur est initialement déchargé ($u_C = 0$ pour $t < 0$).
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le générateur débite alors dans l'ensemble RC série.





Évolution des grandeurs électriques dans le circuit pour $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$; $C = 500\,\mathrm{\mu F}$; $E = 4\,\mathrm{V}$

D'après `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php`

II.2 Conditions initiales

☆ Méthode

❶ Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur ($t < 0$).

❷ Utiliser la continuité de la charge du condensateur (ou de la tension aux bornes du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).

❸ Déterminer les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ en appliquant les relations intensité-tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$.

Démonstration

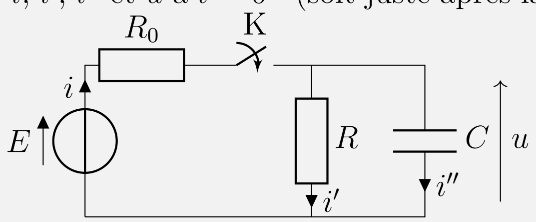
Déterminer $u_c(0^-)$ et $i(0^-)$ dans le circuit représenté au I.1, sachant que le condensateur était initialement déchargé.

Quelle grandeur électrique ne peut pas subir de discontinuité (et est donc une fonction continue du temps) ?

En déduire $u_C(0^+)$ et $i(0^+)$.

Exercice de cours Ⓐ

Dans le circuit ci-dessous, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est déchargé pour $t < 0$. Déterminer les expressions de i, i', i'' et u à $t = 0^+$ (soit juste après la fermeture de l'interrupteur).



II.3 État final

Méthode

Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du circuit, c'est à dire les tensions et intensités dans le circuit une fois le nouveau régime permanent atteint.

❶ Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau **régime permanent** atteint en remplaçant chaque **condensateur par un interrupteur ouvert** et chaque **bobine par un fil**.

❷ Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour le circuit « redessiné », où :

- les intensités sont nulles dans les branches où les interrupteurs ouverts remplacent les condensateurs
- les tensions sont nulles aux bornes des fils qui remplacent les bobines

Démonstration

Déterminer $u_C(\infty)$, $i(\infty)$ et $u_R(\infty)$ dans le circuit représenté au II.1.

Exercice de cours Ⓑ

Déterminer les expressions de i, i', i'' et u au bout d'un temps très long après la fermeture de l'interrupteur pour le circuit de l'exercice de cours Ⓐ.

II.4 Mise en équation

☆ Méthode pour résoudre un exercice d'électricité

❶ Représenter le circuit étudié.

❷ Définir toutes les intensités (une par branche) et tensions (une aux bornes de chaque dipôle) : flèche et nom sur le schéma du circuit.

❸ Écrire toutes les relations indépendantes possibles (attention aux redondances) :
- lois des mailles
- lois des nœuds
- relations intensité-tension pour tous les dipôles

❹ Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur d'intérêt.

❺ La mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$$

avec : s = une tension, une intensité ou une charge
τ = constante de temps du circuit
$s(\infty)$ = valeur qu'atteint s en régime permanent

Démonstration

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur et la mettre sous la forme canonique suivante : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$.
2. Identifier l'expression de τ, et justifier par analyse dimensionnelle que cette grandeur est homogène à un temps.

II.5 Résolution de l'équation différentielle

Méthode

Résolution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{s(\infty)}{\tau}$ **notée (E) :**

La résolution se fait en **4 étapes** :

❶ Déterminer la **solution générale** s_H **de l'équation homogène** (= sans second membre)

$$\frac{\mathrm{d}s_H}{\mathrm{d}t} + \frac{s_H}{\tau} = 0 \quad \text{(EH)}$$

$$s_H(t) = Ke^{-t/\tau} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R} \text{ une constante d'intégration}$$

❷ Déterminer une **solution particulière** s_P **de (E)** : on la cherche sous la forme du second membre, donc une constante $\left(\dfrac{\mathrm{d}s_P}{\mathrm{d}t} = 0\right)$: $\dfrac{s_P}{\tau} = \dfrac{s(\infty)}{\tau}$, soit $s_P = s(\infty)$.

❸ Écrire la solution générale de (E) : c'est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

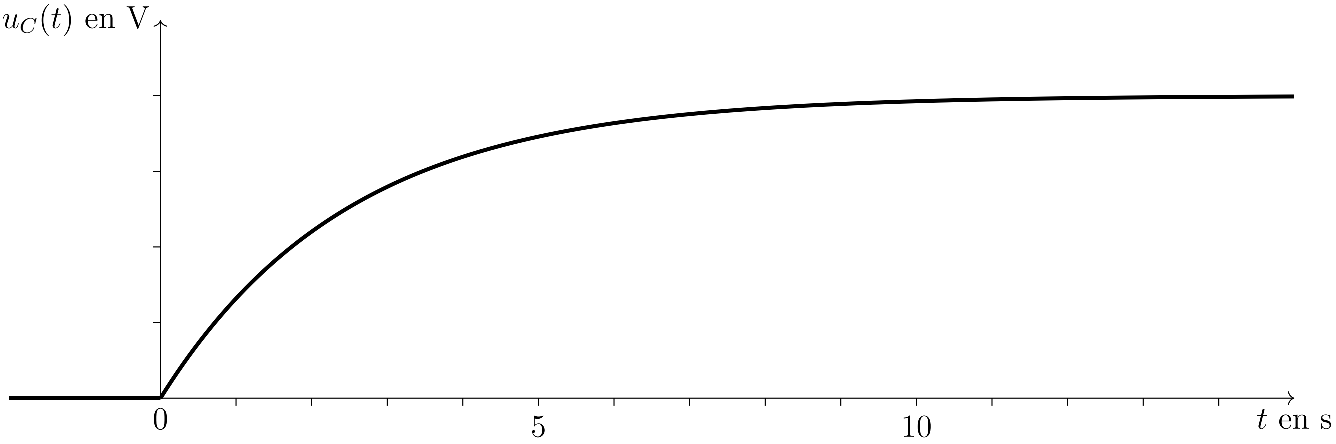
$$s(t) = s_H(t) + s_P \quad \text{soit :} \quad s(t) = Ke^{-t/\tau} + s(\infty)$$

❹ Déterminer la **constante d'intégration** K à l'aide de la condition initiale $s(t = 0)$.

Démonstration

Résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur en respectant la condition initiale déterminée au II.2 .

II.6 Tracé de $u_C(t)$



II.7 Constante de temps τ

Formule

Constante de temps τ du circuit RC :

$$\tau = RC$$

avec :
- R = valeur de la résistance du circuit RC, en Ω
- C = valeur de la capacité du condensateur du circuit RC, en F
- τ = constante de temps (ou temps caractéristique) du circuit RC, en s

Application directe

Déterminer par le calcul la valeur de la constante de temps du circuit RC étudié dans la partie I.1 .

Méthodes pour déterminer τ graphiquement

Méthode n° 1 :

❶ Déterminer la valeur de la tension finale $u_C(\infty)$ atteinte au bout d'un temps très long.

❷ Calculer $0,63 \times u_C(\infty)$.

❸ Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe $u_C(t)$ d'ordonnée $0,63 \times u_C(\infty)$.

Méthode n° 2 :

❶ Tracer la tangente à l'origine à la courbe $u_C(t)$.

❷ Tracer l'asymptote à la courbe $u_C(t)$ (valeur atteinte pour $t \to +\infty$).

❸ L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote est τ.

Application directe

Déterminer par le tracé (2 méthodes) la valeur de la constante de temps sur la courbe représentée au II.6 qui correspond à l'évolution de $u_C(t)$ du circuit RC étudié dans la partie I.1 .

Exercice de cours C

Q1. Vérifier que le condensateur est chargé à plus de 63% au bout d'une durée égale à τ et justifier la 1re méthode graphique pour déterminer τ.

Q2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $u_C(t)$ à l'instant initial. Justifier la 2e méthode graphique pour déterminer τ.

Q3. Vérifier que le condensateur est chargé à plus de 99% au bout d'une durée égale à 4,6τ.

> **Remarque**
> On définit conventionnellement la fin du régime transitoire à $t = 4,6\,\tau$, ensuite le régime est dit permanent.

Application directe

Faire apparaître la limite entre les 2 régimes (transitoire et permanent) sur le graphique du II.6.

II.8 Intensité dans le circuit

On détermine l'expression de $i(t)$ avec la relation intensité-tension du condensateur : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

Exercice de cours D

Déterminer $i(t)$ et vérifier que l'expression est cohérente avec la courbe donnée au II.1 .

II.9 Bilan énergétique

Méthode

Bilans de puissance et d'énergie

❶ Écrire la loi des mailles, en la mettant sous la forme $E = ...$

❷ Multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit.

❸ Identifier et interpréter chaque terme de la relation obtenue : puissance fournie par le générateur et puissances reçue par les dipôles en convention récepteur.

❹ Vérifier qu'il y a conservation de la puissance, donc de l'énergie.

❺ Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique (en utilisant l'expression de $u_C(t)$ pour faire le calcul de l'intégrale).

Démonstration

Établir le bilan de puissance du circuit RC série soumis à un échelon de tension E sous la forme :

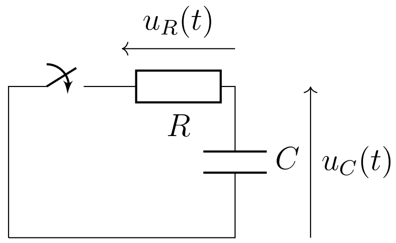
$$P_G = P_{\text{Joule}} + P_{\text{stockée dans C}}$$

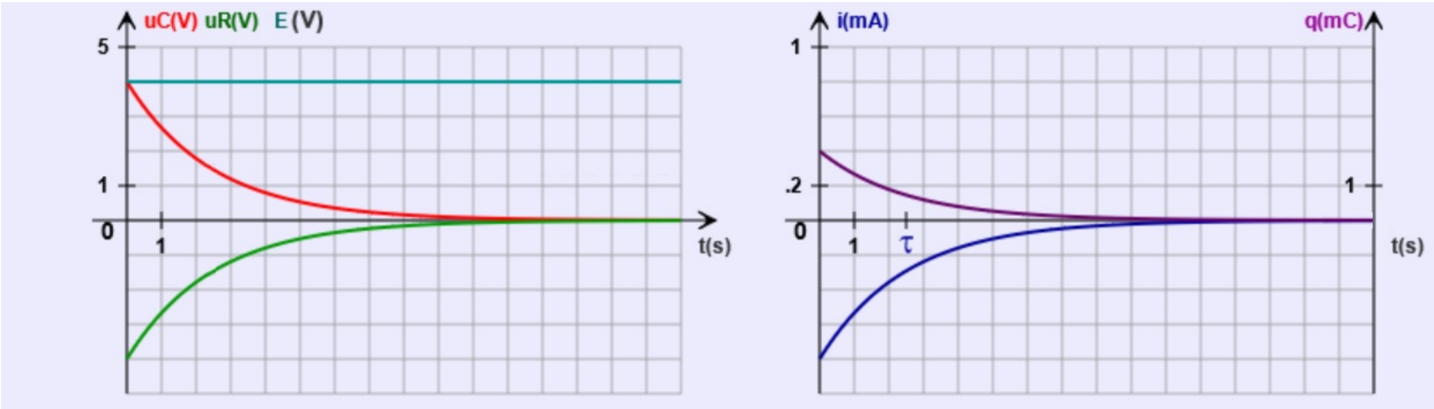
Expliciter chaque terme et donner sa signification.
Faire le bilan énergétique.

III Régime libre du circuit RC

III.1 Observations expérimentales

On étudie la décharge d'un condensateur de capacité C initialement chargé sous une tension E à travers une résistance R. Le condensateur est initialement chargé ($u_C = 4\,\mathrm{V}$ pour $t < 0$). À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le générateur débite alors dans l'ensemble série $\{RC\}$.





Évolution des grandeurs électriques dans le circuit pour $R = 5\,\mathrm{k}\Omega$; $C = 500\,\mu\mathrm{F}$

D'après `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php`

III.2 Modélisation

Démonstration

En suivant les mêmes étapes que dans le II.4, établir :

- l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur
- l'équation différentielle vérifiée la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$
- l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant à travers le circuit $i(t)$

Mettre ces équations sous forme canonique et introduire la constante de temps du circuit.

Démonstration

En suivant la méthode du II.3, déterminer, en justifiant rigoureusement, les conditions initiales :

— tension aux bornes du condensateur à l'instant initial $u_C(0^+)$
— charge du condensateur à l'instant initial $q(0^+)$
— intensité du courant à travers le circuit à l'instant initial $i(0^+)$

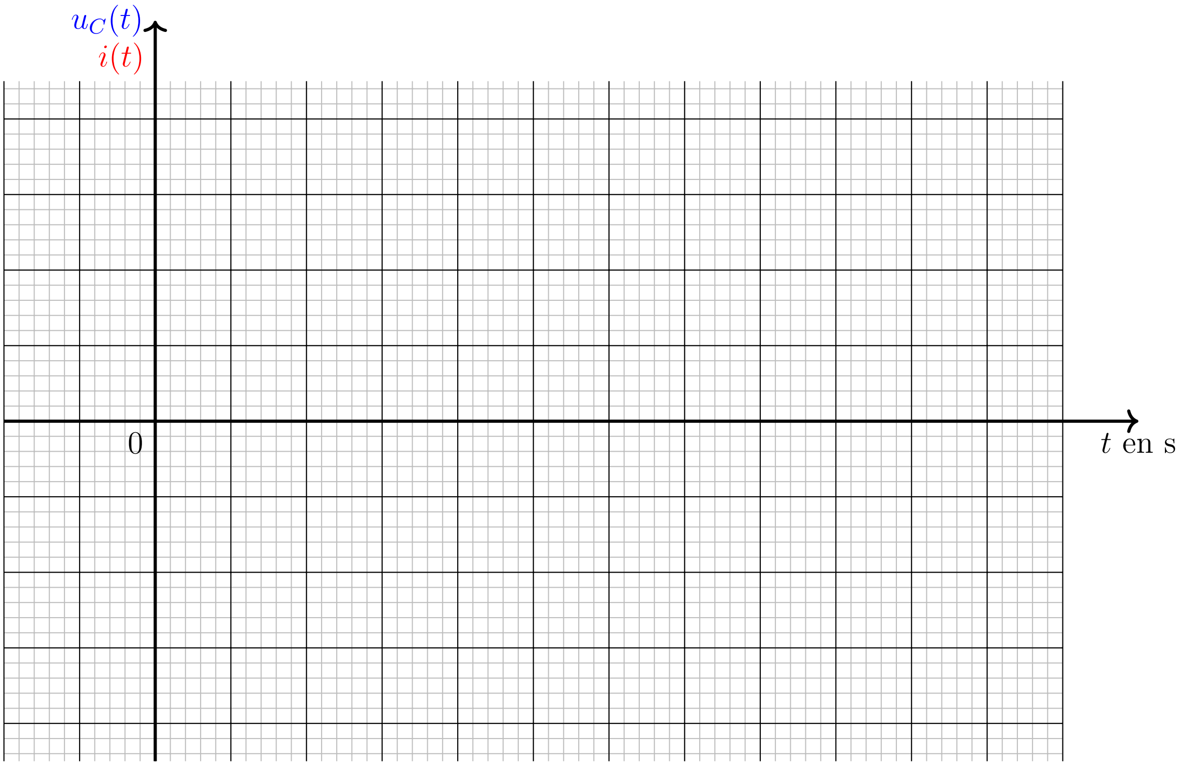
Démonstration

Déterminer complètement $q(t)$, $u_c(t)$ et $i(t)$.

Démonstration

Compléter le tableau de valeurs et tracer $u_c(t)$ et $i(t)$.
Données : $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$; $C = 500\,\mathrm{\mu F}$; $u_C(0) = 4{,}0\,\mathrm{V}$

t en s							
$u_C(t)$ en V							
$i(t)$ en mA							



Démonstration

- Utiliser l'expression de $u_C(t)$ pour déterminer la valeur de $u_C(\tau)$. En déduire une méthode pour déterminer graphiquement τ.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $u_C(t)$ à $t = 0$. En déduire une 2ᵉ méthode pour déterminer graphiquement τ.

III.3 Bilan énergétique

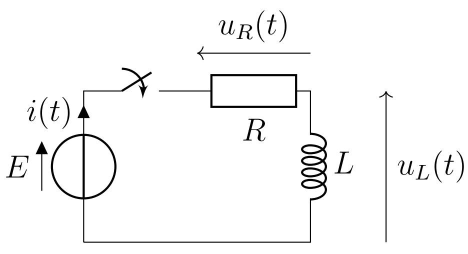
Démonstration
Utiliser la méthode du II.9 pour faire le bilan énergétique du régime libre.

IV Étude du circuit RL

IV.1 Mise en équation

On étudie la réponse indicielle d'un circuit RL série : à $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le générateur débite alors dans l'ensemble série $\{RL\}$.
Les étapes seront les mêmes que pour le circuit RC :

- Détermination des conditions initiales
- Mise en équation
- Résolution analytique de l'équation



Démonstration
Déterminer les conditions initiales $i(0^+)$ et $u_L(0^+)$.

Démonstration

Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ et la mettre sous forme canonique.

Démonstration

Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, avec la méthode présentée au II.5 .

IV.2 Résolution numérique par la méthode d'Euler

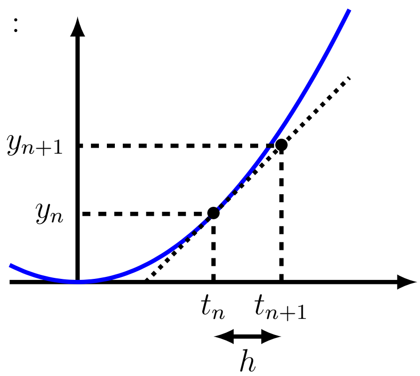
La méthode d'Euler est une alternative à la résolution analytique d'une équation différentielle du 1^{er} ordre à cœfficients constants : c'est une procédure numérique qui permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du 1^{er} ordre avec condition initiale. Elle est basée sur la discrétisation de la variable t. Le problème se ramène à un calcul itératif, qui est automatisé à l'aide d'un script Python.

Principe de la méthode d'Euler

L'équation à résoudre est de la forme : $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left(t, y(t)\right) \quad ; \quad 0 \leq t \leq T \\ y(t=0) = y_0 \end{cases}$

Après avoir choisi un pas h de calcul, on établit le schéma suivant :

$$\begin{cases} \text{à } t = 0 : & y_0 \\ \text{à } t_1 = h : & y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \times h \\ \text{à } t_n = nh : & y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \times h \\ \ldots & \ldots \\ \text{à } t_{n+1} = (n+1)h : & y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) \times h \end{cases}$$



Algorithme d'Euler :

① Initialisation du pas h et de la durée T de la simulation numérique

② Initialisation des conditions initiales : $t = 0$ et $y = y(0)$

③ Tant que $t \leq T$ faire : $t = t + h$

$y = y + h \times f(t, y)$

Application au circuit RL série :

Répondre aux questions suivantes en utilisant le script copié ci-dessous :

Q1. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i_L.

Q2. Lancer la console EduPyhton et ouvrir le fichier « reponse_RL_euler_eleves.py », puis lire les commentaires liées aux commandes.

Q3. Si elles n'apparaissent pas, afficher les numéros de lignes.

Q4. Compléter les lignes 27, 29 et 39.

Q5. Exécuter le programme.

Q6. Que se passe-t-il si le pas de numérisation est multiplié par 10 ?

Q7. Ajouter les lignes de code permettant de tracer en rouge sur le même graphique la solution analytique.

Q8. Faire varier le pas de numérisation pour tester l'écart entre la solution numérique et la solution analytique.

Q9. En déduire une limite de la méthode d'Euler.

```
 1: # le fichier est encodé en utf8
 2: # importations de librairies utiles (calculs, fonctions, graphiques)
 3: import numpy, math, matplotlib
 4: # utilisation des librairies précédentes
 5: from pylab import *
 6: R=1E3
 7: E=5
 8: L=1
 9: # initialisation des paramètres de temps
10: t, dt, tmax = 0 , 0.0001, 0.006
11: # initialisation d'une liste avec les dates
12: x = [0]
13: # initialisation de l'intensité
14: y0 = 0
15: # initialisation d'une liste avec les intensités
16: y=[0]
17:  # ouverture du fichier pour stocker liste de points
18: fichier=open("RL.txt",'w')
19:  # tant que la date est inférieure à la date max
20: while t < tmax:
21:    # on incrémente la date avec le pas de calcul
22:    t = t + dt
23:    # on ajoute cette nouvelle date à la fin de la liste des
24:    # dates (round permet l'affichage de  4 décimales)
25:    x.append(round(t,4))
26:    # on calcule l'intensité à l'instant n+1
27:    y1 =
28:    # on affecte à l'ancienne intensité la nouvelle pour la boucle suivante
29:    y0 =
30:    # on ajoute la nouvelle intensité à la fin de la liste des intensités
31:    y.append(round(y1,4))
32:    # on écrit la date et l'intensité à l'instant n+1 dans le fichier
33:    fichier.write(str(round(t,5))+"\t"+str(round(y1,4))+"\n")
34: # on ferme le fichier de stockage
35: fichier.close()
36: # on affiche les valeurs de temps et d'intensités calculées
37: print (x,y)
38: # b pour bleu ; - pour ligne continue ; x pour les marqueurs en croix
39: plt.plot(x,y,"b-x", label="pas de        ")
40: # nom de l'axe des abscisses
41: plt.xlabel("temps (s)")
42: # nom de l'axe des ordonnées
43: plt.ylabel("i_L (V)")
44: plt.legend(loc='lower right')
45: # on montre le graphique
46: plt.show()
```